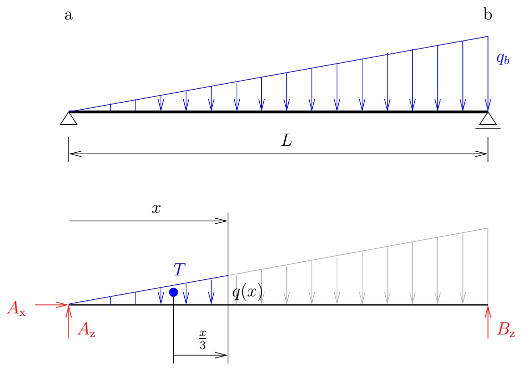
**Zadání:** Stanovne minimální průměr $D$ kruhové tyče délky $L$ zatížené a podepřené dle obrázku tak, aby nedošlo k překročení dovoleného napětí $\sigma_{\mathrm{D}}$.




Reakce v podporách

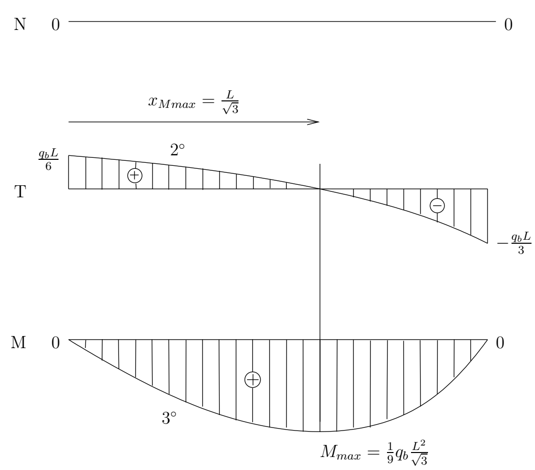
$$
\begin{aligned}
\rightarrow x: A_{\mathrm{x}} &= 0\\
\curvearrowleft a: B_{\mathrm{z}}L - \frac{1}{2}q_bL\frac{2}{3}L &= 0\\
B_{\mathrm{z}} &= \frac{1}{3}q_bL\\
\curvearrowleft b: -A_{\mathrm{z}}L + \frac{1}{2}q_bL\frac{1}{3}L &= 0\\
A_{\mathrm{z}} &= \frac{1}{6}q_bL
\end{aligned}
$$

Průběh zatížení

$$
\begin{aligned}
\frac{q(x)}{x} &= \frac{q_b}{L}\\
q(x) &= \frac{q_b}{L}x
\end{aligned}
$$

$x \in \langle 0, L)$

$$
\begin{aligned}
N(x) &= 0\\
T(x) &= A_{\mathrm{z}} - \frac{1}{2}q(x)x\\
&= \frac{1}{6}q_bL - \frac{1}{2}\frac{q_b}{L}x^2\\
M(x) &= A_{\mathrm{z}}x - \frac{1}{2}q(x)x\frac{x}{3}\\
&= \frac{1}{6}q_bLx - \frac{1}{6}\frac{q_b}{L}x^3
\end{aligned}
$$




Určení polohy maximálního ohybového momentu[1]

$$
\begin{aligned}
T(x) &= 0\\
\frac{1}{6}q_bL - \frac{1}{2}\frac{q_b}{L}x^2 &= 0\\
x^2 - \frac{1}{3}L^2 &= 0\\
x_{1,2} &= \pm\frac{L}{\sqrt{3}}\\
x &= \frac{L}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Výpočet velikosti maximálního ohybového momentu

$$
M_{max} = M(\frac{L}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{6}q_bL\frac{L}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6}\frac{q_b}{L}\frac{L^3}{\sqrt{3}^3} = \frac{1}{6}q_b\frac{L^2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{18}\frac{q_b}{L}\frac{L^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{9}q_b\frac{L^2}{\sqrt{3}}
$$

[1] Lokální extrémy funkce $M(x)$ hledáme tak, že položíme její první derivaci, funkci $T(x)$, rovnou nule a vypočítáme kořeny vzniklé rovnice.

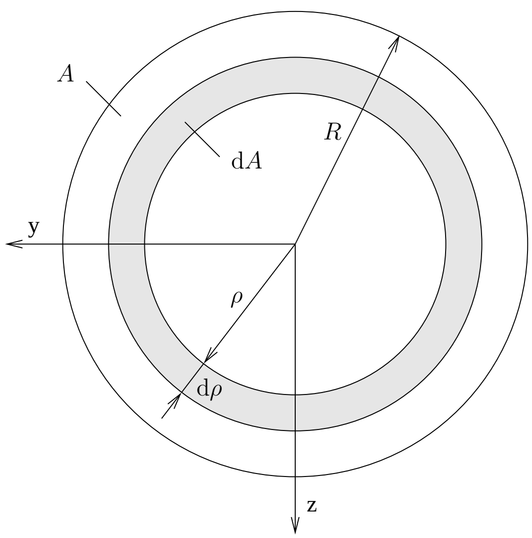
Výpočet maximálního ohybového momentu s využitím Maxima (5.43.2)

```
assume(q > 0);
assume(L > 0);

A: (1/6)*q*L;  /* [N] vertical reaction */
qx: (q/L)*x; /* [N/m']loading function */

Tx: A -integrate(qx, x); /* shear force function */
xmax:solve([Tx],[x]);
xmax[2]; /* local extreme position */

Mx: integrate(Tx, x); /* bending moment function */
Mmax:subst(xmax[2],x,Mx); /* max bending moment */
```

Maximální napětí $\sigma_{\max}$ musí být v každém místě konstrukce menší než napětí dovolené $\sigma_\mathrm{D}$. Pokud je nosník prizmatický, hledáme $\sigma_{\max}$ v místě maximálního ohybového momentu $M_{\max}$.

$$\begin{aligned} \sigma_\mathrm{x}(x,z) &= \frac{M(x)}{I_\mathrm{y}} z \\ \sigma_\mathrm{D} > \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{I_\mathrm{y}} e, \end{aligned}$$

kde excentricita $e$ je maximální vzdálenost ve směru $z$ mezi těžistěm a okrajem průřezu. Axiální kvadratický moment setrvačnosti $I_\mathrm{y}$ kruhového průřezu vyjádříme pomocí polárního momentu setrvačnosti




$$\begin{aligned} I_\mathrm{p} &= \int_{(A)} \rho^2 \mathrm{d}A = \int_0^R \rho^2 2\pi\rho \mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^R = \frac{1}{2} R^4 \pi = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^4 \pi \\ &= \frac{\pi}{32} D^4 = I_\mathrm{y} + I_\mathrm{z} \end{aligned}$$

Vzhledem k symetricitě průřezu

$$I_\mathrm{y} = I_\mathrm{z} = \frac{\pi}{64} D^4$$

Výpočet minimálního průměru

$$\begin{aligned} \sigma_\mathrm{D} &> \frac{M_{\max}}{I_\mathrm{y}} e = \frac{\frac{1}{9} q_b \frac{L^2}{\sqrt{3}}}{\frac{\pi}{64} D^4} \frac{D}{2} = \frac{\frac{1}{9} q_b \frac{L^2}{\sqrt{3}}}{\frac{\pi}{32} D^3} = \frac{32}{9} \frac{q_b}{\pi} \frac{L^2}{\sqrt{3} D^3} \\ D &> \sqrt[3]{\frac{32}{9} \frac{q_b}{\pi} \frac{L^2}{\sqrt{3}\sigma_\mathrm{D}}} \end{aligned}$$

```
Mmax:subst(L/sqrt(3),x,Mx); /* [Nm] max bending moment */

sigma:sigmaY; /* [Pa] yield stress */
Iy:(%pi/64)*D^4; /* [m^4] axial moment of itertia */
e:D/2; /* [m] excentricity */

eqD:sigma=(Mmax/Iy)*e; /* design formula */
solve(eqD,D); /* minimal diameter */
```