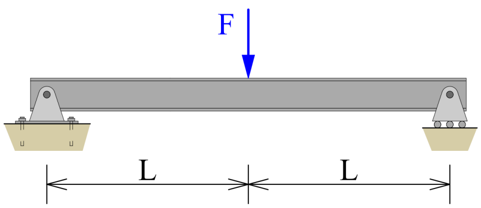
Zadání: Ověřte hodnotu maximálníhu průhybu nosníku i) Bernoulliho diferenciální rovnicí ohybové čáry ii) energeticky iii) Mohrovou analogií.



Pro všechny metody je nutná znalost funkcí ohybového momentu. Při řešení využijeme symetrie úlohy. Maximální průhyb očekáváme v místě zatížení.

$$\overrightarrow{x_1} \in \langle 0, L) \equiv \overleftarrow{x_2} \in \langle 0, L)$$

$$\begin{aligned} R_{1,2} &= \frac{1}{2}F \\ M(x_{1,2}) &= \frac{1}{2}Fx_{1,2} \end{aligned}$$

Bernoulliho diferenciální rovnice ohybové čáry

$$\begin{aligned} EI_y\varphi(x_{1,2}) &= -\frac{1}{4}Fx_{1,2}^2 + C_1 \\ \varphi(L) = 0 &= -\frac{1}{4}FL^2 + C_1 \\ C_1 &= \frac{1}{4}FL^2 \\ EI_y\varphi(x_{1,2}) &= -\frac{1}{4}Fx_{1,2}^2 + \frac{1}{4}FL^2 \\ EI_y\mathrm{w}(x_{1,2}) &= -\frac{1}{12}Fx_{1,2}^3 + \frac{1}{4}FL^2x_{1,2} + C_2 \\ \mathrm{w}(0) = 0 &= C_2 \\ EI_y\mathrm{w}(x_{1,2}) &= -\frac{1}{12}Fx_{1,2}^3 + \frac{1}{4}FL^2x_{1,2} \end{aligned}$$

```
kill(all);
assume(L>0);
assume(F>0);
globalsolve: true;

_Mx:(1/2)*F*x; /* bending monent*/
_phix:-integrate(_Mx,x)+C1; /* angle */
_wx:integrate(_phix,x)+C2; /* deflection */

phiL:subst(L,x,_phix); /* B.C. phi(L) = 0 */
w0:subst(0,x,_wx); /* B.C. w(0) = 0 */
linsolve([phiL,w0],[C1,C2]);

/* results */
phix:-integrate(_Mx,x)+C1; /* angle */
wx:integrate(phix,x)+C2; /* deflection */
```

Maximální průhyb nosníku

$$EI_y\mathrm{w}_{\max} = EI_y\mathrm{w}(L) = \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)FL^3 = \frac{1}{6}FL^3$$

```
wmaxB:subst(L,x,wx); /* max deflection */
```

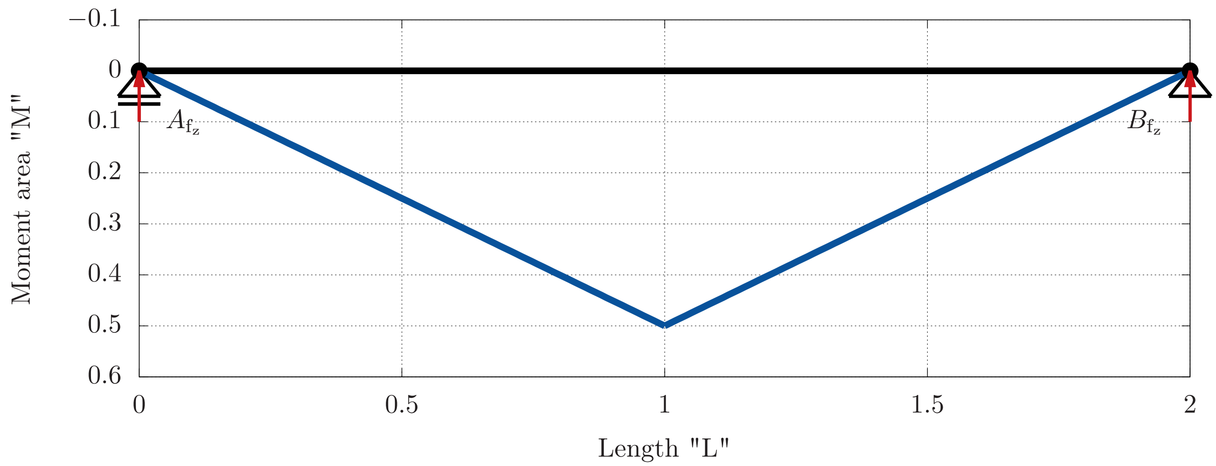
Energetický přístup

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{F}} &= U_{\mathrm{def}} \\ \frac{1}{2}F\mathrm{w}_{\mathrm{F}} &= \int_{(L)} \frac{M^2(x)}{2EI_y}\mathrm{d}x = \frac{1}{2EI_y}\left(\int_0^L (Fx_1)^2\mathrm{d}x_1 + \int_0^L (Fx_2)^2\mathrm{d}x_2\right) \\ F\mathrm{w}_{\mathrm{F}} &= \frac{1}{EI_y}\left(\frac{1}{12}F^2L^3 + \frac{1}{12}F^2L^3\right) \\ EI_y\mathrm{w}_{\mathrm{F}} &= \frac{1}{6}FL^3 \end{aligned}$$

```
Udef:2*integrate(_Mx^2,x,0,L)/(2*E*Iy); /* deformation energy */
Wext:(1/2)*F*wF; /* external work */
linsolve([Wext=Udef],[wF]);
wmaxE:wF; /* max deflection */
```

Mohrova analogie

Pro průhyb prostě podepřeného nosníku platí $\mathrm{w}(0) = 0$ a $\mathrm{w}(L) = 0$. Fiktivní nosník proto podepřeme ve shodě s okrajovými podmínkami $M_\mathrm{f}(0) = 0$ a $M_\mathrm{f}(L) = 0$ a zatížíme momentovou plochou.



$$
\begin{aligned}
\curvearrowleft b: -A_{\mathrm{f_z}} 2L + \frac{1}{2} F L 2L \cdot L &= 0 \\
A_{\mathrm{f_z}} &= \frac{1}{2} F L^2 \\
EI_y \mathrm{w}_{\max} = EI_y \mathrm{w}(L) = M_\mathrm{f}(L) &= A_{\mathrm{f_z}} L - \frac{1}{2} F L^2 \frac{2}{3} L = \frac{1}{2} F L^3 - \frac{1}{3} F L^3 = \frac{1}{6} F L^3
\end{aligned}
$$