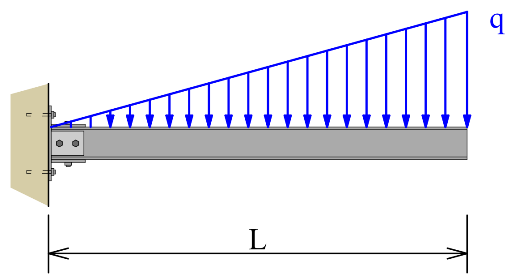
**Zadání:** Vyjádřete analytický předpis funkce průhybové čáry nosníku zatíženého a podepřeného dle obrázku a hodnotu maximálního průhybu.




Při vyšetřování průhybu nosníku můžeme též využít úplnou diferenciální rovnici průhybové čáry kombinující Schwedlerův a Bernoulliho přístup

$$
\begin{aligned}
M''(x) &= -q(x)\\
\mathrm{w}''(x) &= -\frac{M(x)}{EI_y}\\
EI_y \mathrm{w}^{\mathrm{iv}}(x) &= \frac{q(x)}{EI_y}
\end{aligned}
$$

Nevýhodou této metody je nutnost vyjadřování čtyř integračních konstant pro každý interval. Výhodou je velmi snadná algoritmizace úlohy.

Prvním krokem řešení je stanovení koeficientů lineární zatěžovací funkce dané předpisem $q(x) = ax + b$ splňující okrajové podmínky $q(0) = q$ (volný konec), $q(L) = 0$ (vetknutí) v intervalu $\overleftarrow{x} \in \langle 0, L)$.

$$
\begin{aligned}
q(0) = q &= b\\
q(L) = 0 &= aL + q\\
a &= -\frac{q}{L}\\
q(x) &= -\frac{q}{L}x + q
\end{aligned}
$$

Zatěžovací funkci postupně čtyřikrát integrujeme pro získání funkce průhybu nosníku

$$\overleftarrow{x} \in \langle 0, L)$$

$$
\begin{aligned}
T(x) &= \frac{q}{L}\frac{x^2}{2} - qx + C_1\\
T(0) = 0 &= C_1\\
T(x) &= \frac{1}{2}\frac{q}{L}x^2 - qx
\end{aligned}
$$

```
qx:q-(q/L)*x; /* loading function */
Tx:-integrate(qx,x); /* shear forces */
C1:-subst(0,x,Tx); /* B.C. T(0) = 0 */
Tx:Tx+C1; /* final T(x) function (polynom) */
```

$$
\begin{aligned}
M(x) &= \frac{1}{2}\frac{q}{L}\frac{x^3}{3} - q\frac{x^2}{2} + C_2\\
M(0) = 0 &= C_2\\
M(x) &= \frac{1}{6}\frac{q}{L}x^3 - \frac{1}{2}qx^2
\end{aligned}
$$

```
Mx:integrate(Tx,x); /* bending moment */
C2:-subst(0,x,Mx); /* B.C. M(0) = 0 */
Mx:Mx+C2; /* final M(x) function (polynom) */
```

$$
\begin{aligned}
EI_y\varphi(x) &= -\frac{1}{6}\frac{q}{L}\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}q\frac{x^3}{3} + C_3 \\
\varphi(L) = 0 &= -\frac{1}{24}\frac{q}{L}L^4 + \frac{1}{6}qL^3 + C_3 \\
C_3 &= -\frac{1}{8}qL^3 \\
EI_y\varphi(x) &= -\frac{1}{24}\frac{q}{L}x^4 + \frac{1}{6}qx^3 - \frac{1}{8}qL^3
\end{aligned}
$$

```
phix:integrate(-Mx,x); /* angle */
C3:-subst(L,x,phix); /* B.C. phi(L) = 0 */
phix:phix+C3; /* final phi(x) function (polynom) */
```

$$
\begin{aligned}
EI_y\mathrm{w}(x) &= -\frac{1}{120}\frac{q}{L}x^5 + \frac{1}{24}qx^4 - \frac{1}{8}qL^3x + C_4 \\
\mathrm{w}(L) = 0 &= -\frac{1}{120}\frac{q}{L}L^5 + \frac{1}{24}qL^4 - \frac{1}{8}qL^4 + C_4 \\
C_4 &= \frac{11}{120}qL^4 \\
EI_y\mathrm{w}(x) &= -\frac{1}{120}\frac{q}{L}x^5 + \frac{1}{24}qx^4 - \frac{1}{8}qL^3x + \frac{11}{120}qL^4
\end{aligned}
$$

```
wx:integrate(phix,x); /* deflection */
C4:-subst(L,x,wx); /* B.C. w(L) = 0 */
wx:wx+C4; /* final w(x) function (polynom) */
```

Maximální průhyb nosníku (na volném konci)

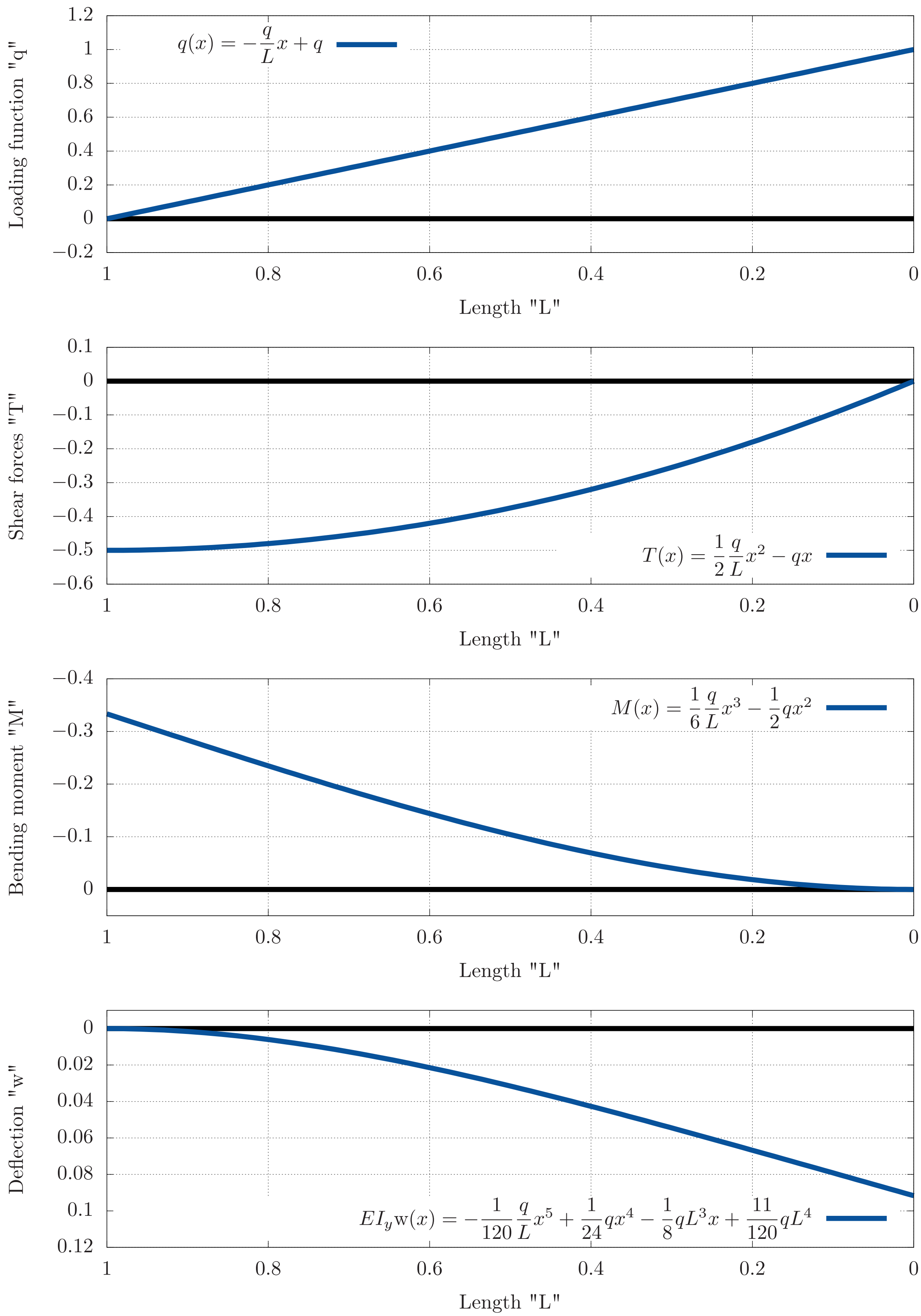
$$
EI_y\mathrm{w}(0) = \frac{11}{120}qL^4
$$

```
wmax:subst(0,x,wx); /* max deflection at w(0) */
```

Kontrola nulového pruhybu ve vetknutí

$$
\begin{aligned}
EI_y\mathrm{w}(L) &= -\frac{1}{120}qL^4 + \frac{1}{24}qL^4 - \frac{1}{8}qL^4 + \frac{11}{120}qL^4 \\
&= \frac{-1+5-15+11}{120}qL^4 = 0
\end{aligned}
$$

```
crtl:subst(L,x,wx); /* control: zero deflection at w(L) */
```


Loading function "q"
$q(x) = -\frac{q}{L}x + q$
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Length "L"
Shear forces "T"
$T(x) = \frac{1}{2}\frac{q}{L}x^2 - qx$
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
−0.6
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Length "L"
Bending moment "M"
$M(x) = \frac{1}{6}\frac{q}{L}x^3 - \frac{1}{2}qx^2$
−0.4
−0.3
−0.2
−0.1
0
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Length "L"
Deflection "w"
$EI_y\mathrm{w}(x) = -\frac{1}{120}\frac{q}{L}x^5 + \frac{1}{24}qx^4 - \frac{1}{8}qL^3x + \frac{11}{120}qL^4$
0
0.02
0.04
0.06
0.08
0.1
0.12
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
Length "L"