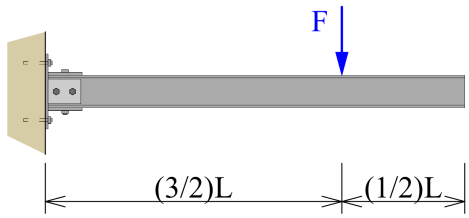
Zadání: Vyjádřete analytický předpis funkce průhybové čáry nosníku zatíženého a podepřeného dle obrázku a hodnoty průhybu v místě zatížení a na volném konci.



Při vyšetřování průhybu nosníku analytickým způsobem vycházíme z (Bernoulliho) diferenciální rovnice průhybové čáry

$$\mathrm{w}''(x) = -\frac{M(x)}{EI_y}.$$

V oblasti od volného k působišti síly F je nosník nezatížený a průběh ohybového momentu nulový. Proto je výhodné umístit počátek souřadného systému do působiště síly. Pro vyjádření průhybu nezatížené části stačí znát úhel pootočení a průhyb na jejím počátku, průběh průhybu je lineární.

$$\overleftarrow{x_1} \in \left\langle 0, \frac{3}{2}L \right)$$

$$\begin{aligned}
M(x_1) &= -Fx_1 \\
EI_y\varphi(x_1) &= \frac{1}{2}Fx_1^2 + C_1 \\
\varphi\left(\frac{3}{2}L\right) = 0 &= \frac{1}{2}F\left(\frac{3}{2}L\right)^2 + C_1 \\
C_1 &= -\frac{9}{8}FL^2 \\
EI_y\varphi(x_1) &= \frac{1}{2}Fx_1^2 - \frac{9}{8}FL^2
\end{aligned}$$

```
M1:-F*x;
phi1:integrate(-M1,x);
C1:-subst((3/2)*L,x,phi1); /* B.C. phi((3/2)L) = 0 */
phi1:phi1+C1; /* final phi(x) function (polynom) */
```

$$\begin{aligned}
EI_y\mathrm{w}(x_1) &= \frac{1}{6}Fx_1^3 - \frac{9}{8}FL^2x_1 + C_2 \\
\mathrm{w}\left(\frac{3}{2}L\right) = 0 &= \frac{1}{6}F\left(\frac{3}{2}L\right)^3 - \frac{9}{8}FL^2\frac{3}{2}L + C_2 \\
C_2 &= \frac{9}{8}FL^3 \\
EI_y\mathrm{w}(x_1) &= \frac{1}{6}Fx_1^3 - \frac{9}{8}FL^2x_1 + \frac{9}{8}FL^3
\end{aligned}$$

```
w1:integrate(phi1,x);
C2:-subst((3/2)*L,x,w1); /* B.C. w((3/2)L) = 0 */
w1:w1+C2; /* final w(x) function (polynom) */
```

Průhyb nosníku v působišti síly ($x_1 = 0$)

$$EI_y\mathrm{w}(0) = \frac{9}{8}FL^3$$

```
w0:subst(0,x,w1); /* deflection at w(0) */
```

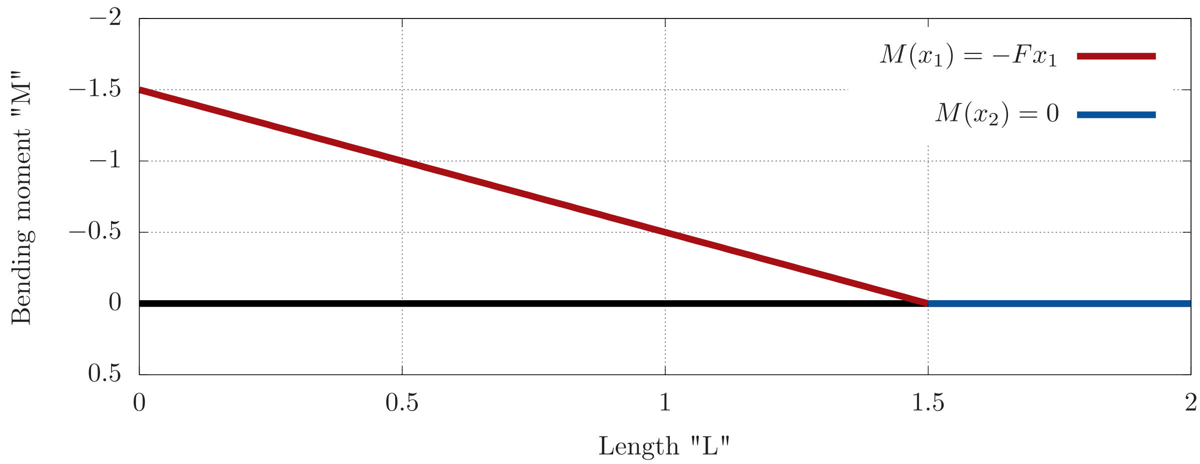
$$\overrightarrow{x_2} \in \left\langle 0, \frac{1}{2}L \right)$$

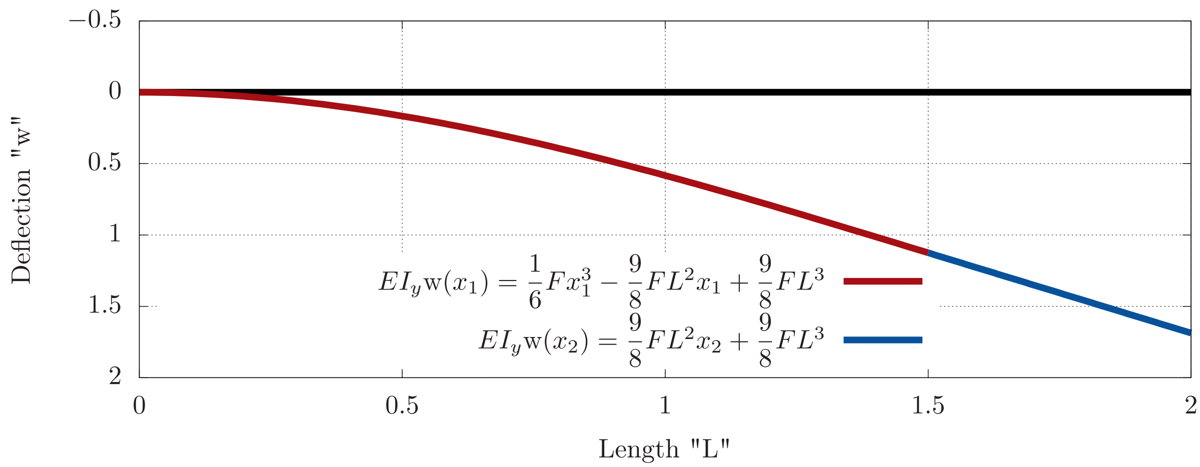
$$\begin{aligned} \varphi_1(0) &= -\varphi_2(0) \\ EI_y\varphi(x_2) &= -C_1 = \frac{9}{8}FL^2 \\ \mathrm{w}_1(0) &= \mathrm{w}_2(0) \\ EI_y\mathrm{w}(x_2) &= -C_1x_2 + C_2 = \frac{9}{8}FL^2x_2 + \frac{9}{8}FL^3 \end{aligned}$$

(Maximální) průhyb nosníku na volném konci

$$EI_y\mathrm{w}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{27}{16}FL^3$$

```
wmax:subst(L/2,x,w2); /* max deflection at w(L/2) */
```





V tomto speciálním případě lze průhyb nosníku v místě zatíženém osamělou silou vyjádřit z rovnosti vnějšího zatížení a deformační energie

$$\begin{aligned}
W_M &= U_{\mathrm{def}} \\
\frac{1}{2} F \mathrm{w_F} &= \int\limits_{(L)} \frac{M^2(x)}{2EI_y} \mathrm{d}x = \frac{1}{2EI_y} \int\limits_0^{\frac{3}{2}L} \left(-Fx_1\right)^2 \mathrm{d}x_1 + 0 \\
EI_y \frac{1}{2} F \mathrm{w_F} &= \frac{9}{16} F^2 L^3 \\
EI_y \mathrm{w_F} &= \frac{9}{8} F L^3
\end{aligned}$$

```
Udef:integrate(M1^2,x,0,(3/2)*L)/(2*E*Iy); /* deformation energy */
Wext:(1/2)*F*wF; /* external work */
solve([Wext=Udef],[wF]);
```