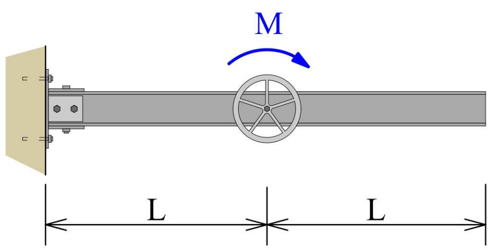
Zadání: Vyjádřete předpis funkce průhybové čáry i) Bernoulliho diferenciální rovnicí ohybové čáry ii) Mohrovou analogií. Využijte deformační energie k vyjádření úhlu pootočení v místě zatížení.



Pro všechny metody je nutná znalost funkcí ohybového momentu.

$$
\begin{aligned}
&\overleftarrow{x_1} \in \langle 0, L)\\
&\quad M(x_1) = 0\\
&\overleftarrow{x_1} \in \langle L, 2L)\\
&\quad M(x_1) = -M
\end{aligned}
$$

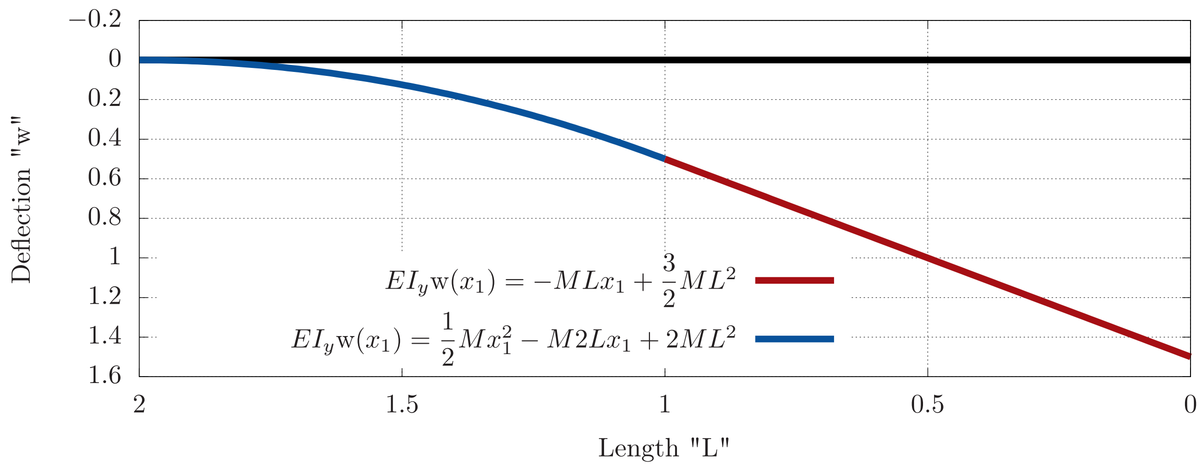
Bernoulliho diferenciální rovnice ohybové čáry

$$
\begin{aligned}
&\overleftarrow{x_1} \in \langle L, 2L)\\
EI_y\varphi(x_1) &= Mx_1 + C_3\\
\varphi(2L) = 0 &= M2L + C_3\\
C_3 &= -2ML\\
EI_y\varphi(x_1) &= Mx_1 - M2L\\
EI_y\mathrm{w}(x_1) &= \frac{1}{2}Mx_1^2 - 2MLx_1 + C_4\\
\mathrm{w}(2L) = 0 &= \frac{1}{2}M(2L)^2 - M2L2L + C_4\\
C_4 &= 2ML^2\\
EI_y\mathrm{w}(x_1) &= \frac{1}{2}Mx_1^2 - 2MLx_1 + 2ML^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overleftarrow{x_1} \in \langle 0, L)\\
EI_y\varphi(x_1) &= C_1\\
\varphi(L) = ML - 2ML &= C_1\\
C_1 &= -ML\\
EI_y\varphi(x_1) &= -ML\\
EI_y\mathrm{w}(x_1) &= -MLx_1 + C_2\\
\mathrm{w}(L) = \frac{1}{2}ML^2 - M2L^2 + 2ML^2 &= -ML^2 + C_2\\
C_2 &= \frac{3}{2}ML^2\\
EI_y\mathrm{w}(x_1) &= -MLx_1 + \frac{3}{2}ML^2
\end{aligned}
$$

Úhel pootočení v místě zatížení

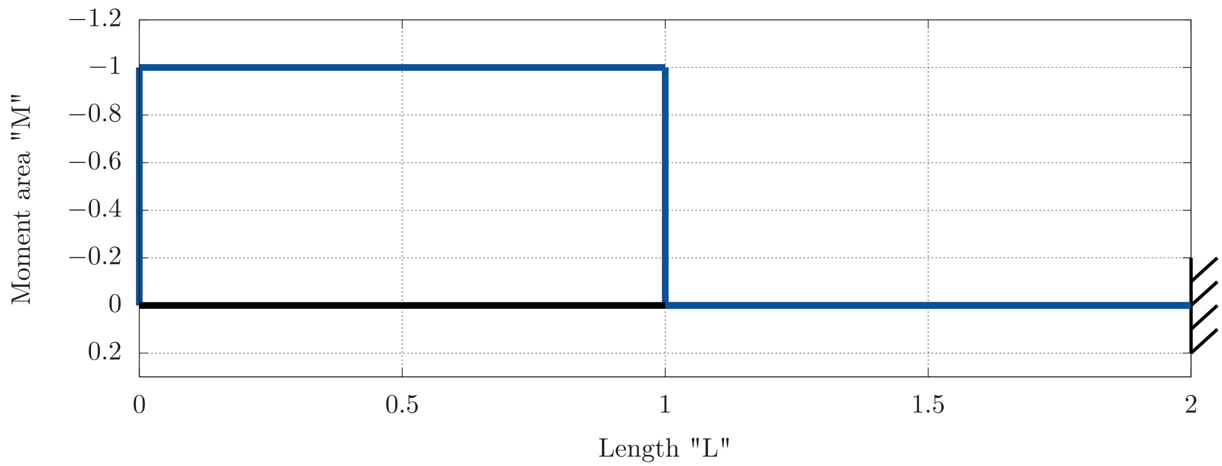
$$EI_y\varphi(L) = -ML$$

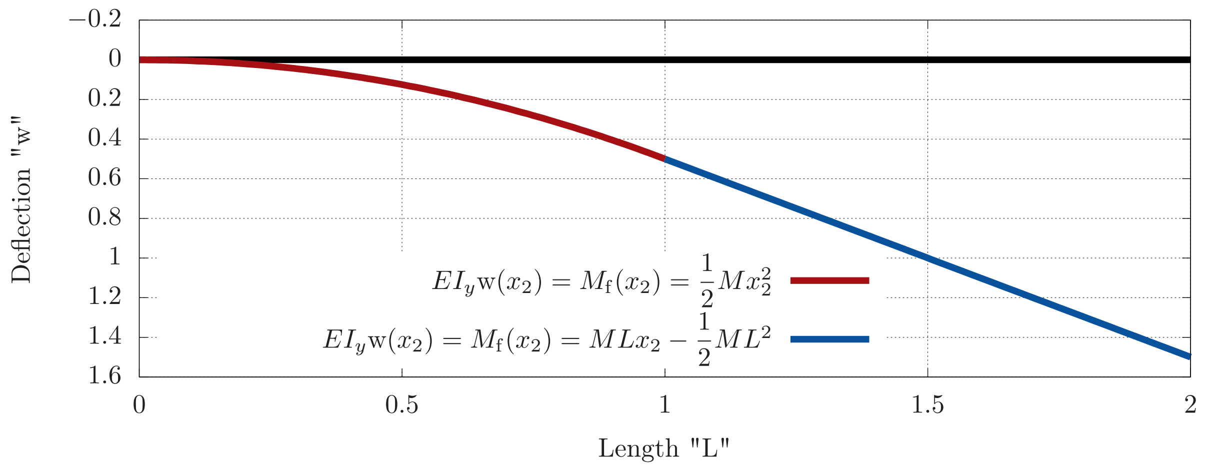



```
kill(all);
assume(L>0);
assume(M>0);
globalsolve: true;

/* x in <L,2L) */
M2:-M; /* bending monent*/
_phi2:-integrate(M2,x)+C3; /* angle */
_w2:integrate(_phi2,x)+C4; /* deflection */

phi2L:subst(2*L,x,_phi2); /* B.C. phi(2L) = 0 */
w2L:subst(2*L,x,_w2); /* B.C. w(2L) = 0 */
linsolve([phi2L,w2L],[C3,C4]);

/* results */
phi2:-integrate(M2,x)+C3; /* angle */
w2:integrate(phi2,x)+C4; /* deflection */

/* x in <0,L) */
M1:0; /* bending monent*/
_phi1:-integrate(M1,x)+C1; /* angle */
_w1:integrate(_phi1,x)+C2; /* deflection */

phiL1:subst(L,x,_phi1); /* B.C. phi1(L) = phi2(L) */
phiL2:subst(L,x,phi2);
wL1:subst(L,x,_w1); /* B.C. w1(L) = w2(L) */
wL2:subst(L,x,w2);
linsolve([phiL1=phiL2,wL1=wL2],[C1,C2]);

/* results */
phi1:-integrate(M1,x)+C3; /* angle */
w1:integrate(phi1,x)+C4; /* deflection */
```

Mohrova analogie

Pro průhyb vetknutý nosníku (zleva) platí $\mathrm{w}(0) = 0$ a $\mathrm{w}(2L) \neq 0$. Fiktivní nosník proto podepřeme ve shodě s okrajovými podmínkami $M_\mathrm{f}(0) = 0$ a $M_\mathrm{f}(2L) \neq 0$ a zatížíme momentovou plochou.





$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{x_2} &\in \langle 0, L) \\
EI_y\mathrm{w}(x_2) = M_\mathrm{f}(x_2) &= \frac{1}{2}Mx_2^2 \\
\overrightarrow{x_2} &\in \langle L, 2L) \\
EI_y\mathrm{w}(x_2) = M_\mathrm{f}(x_2) &= ML\left(x_2 - \frac{1}{2}L\right) = MLx_2 - \frac{1}{2}ML^2
\end{aligned}
$$

Úhel pootočení v místě zatížení

$$EI_y\varphi(L) = T_\mathrm{f}(L) = M_\mathrm{f}'(L) = ML$$

Energetický přístup

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{M}} &= U_{\mathrm{def}} \\
\frac{1}{2} M \varphi_{\mathrm{M}} &= \int\limits_{(L)} \frac{M^2(x)}{2EI_y} \mathrm{d}x = 0 + \frac{1}{2EI_y} \int\limits_0^L M^2 \mathrm{d}x_1 = \frac{M^2 L}{2EI_y} \\
M \varphi_{\mathrm{M}} &= \frac{M^2 L}{EI_y} \\
EI_y \varphi_{\mathrm{M}} &= ML
\end{aligned}
$$

```
Udef:2*integrate(M2^2,x,0,L)/(2*E*Iy); /* deformation energy */
Wext:(1/2)*M*phiM; /* external work */
linsolve([Wext=Udef],[phiM]);
phiM; /* angle at loaded point */
```