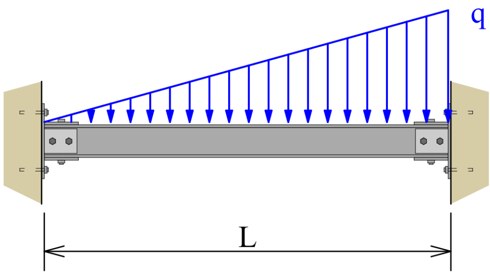
Zadání: Vyjádřete analytický předpis funkce průhybové čáry, polohu a velikost maximálního průhybu staticky neurčitého nosníku.



Funkce průběhů vnitřních sil

$$\overrightarrow{x} \in \langle 0, L)$$

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{q}{L}x \\ T(x) &= -\frac{1}{2}\frac{q}{L}x^2 + R \\ M(x) &= -\frac{1}{6}\frac{q}{L}x^3 + Rx - M_\mathrm{r} \end{aligned}$$

Funkce ohybové čáry

$$\begin{aligned} EI_y\varphi(x) &= \frac{1}{24}\frac{q}{L}x^4 - \frac{1}{2}Rx^2 + M_\mathrm{r}x + C_1 \\ EI_y\mathrm{w}(x) &= \frac{1}{120}\frac{q}{L}x^5 - \frac{1}{6}Rx^3 + \frac{1}{2}M_\mathrm{r}x^2 + C_1x + C_2 \end{aligned}$$

Okrajové podmínky

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 &= C_1 \\ \mathrm{w}(0) = 0 &= C_2 \\ \varphi(L) = 0 &= \frac{1}{24}qL^3 - \frac{1}{2}RL^2 + M_\mathrm{r}L \\ \mathrm{w}(L) = 0 &= \frac{1}{120}qL^4 - \frac{1}{6}RL^3 + \frac{1}{2}M_\mathrm{r}L^2 \\ R &= \frac{3}{20}qL \\ M_\mathrm{r} &= \frac{1}{30}qL^2 \end{aligned}$$

Výsledek

$$\begin{aligned} T(x) &= -\frac{1}{2}\frac{q}{L}x^2 + \frac{3}{20}qL \\ M(x) &= -\frac{1}{6}\frac{q}{L}x^3 + \frac{3}{20}qLx - \frac{1}{30}qL^2 \\ EI_y\varphi(x) &= \frac{1}{24}\frac{q}{L}x^4 - \frac{3}{40}qLx^2 + \frac{1}{30}qL^2x \\ EI_y\mathrm{w}(x) &= \frac{1}{120}\frac{q}{L}x^5 - \frac{1}{40}qLx^3 + \frac{1}{60}qL^2x^2 \end{aligned}$$

Místo maximálního průhybu odpovídá kořenu rovnice čtvrtého řádu

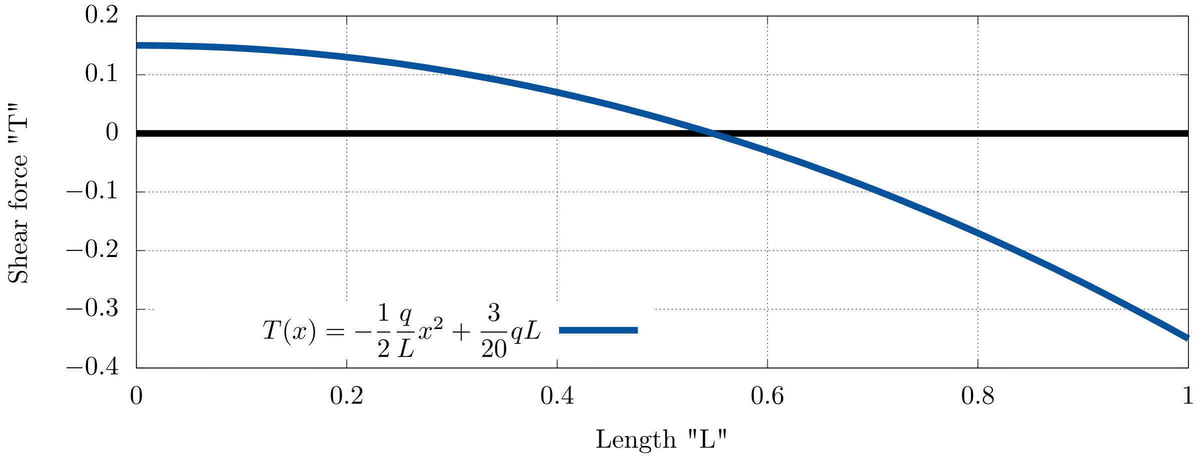
$$EI_y\varphi(x) = 0 = \frac{1}{24}\frac{q}{L}x^4 - \frac{3}{40}qLx^2 + \frac{1}{30}qL^2x$$

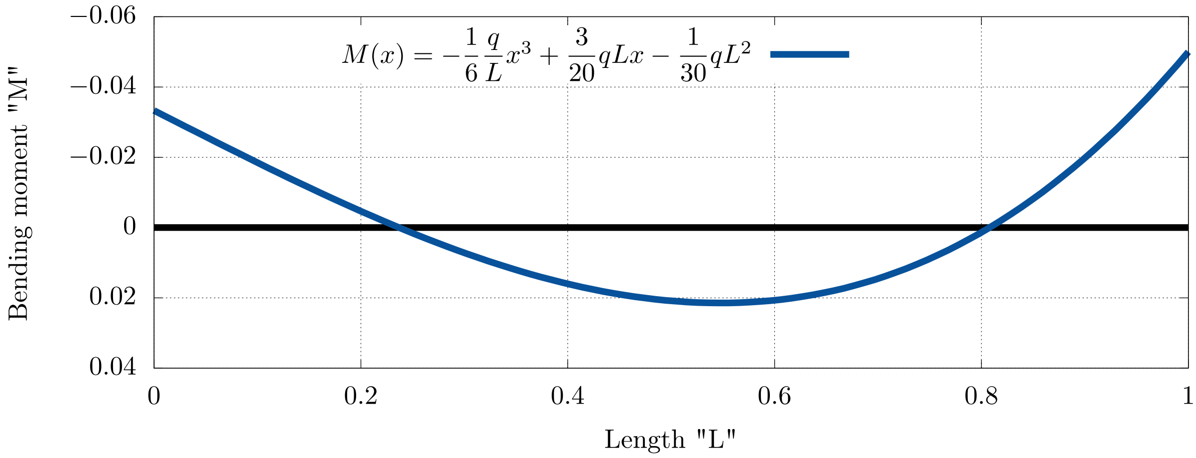
v intervalu $\overrightarrow{x} \in (0, L)$. Kořeny $x_1 = 0$ a $x_2 = L$ jsou v souladu s okrajovými podmínkami. Kořen $x_3 = -\frac{\sqrt{105}+5}{10}L = -1,525L$ je vně intervalu. Jediným kořenem ležícím uvnitř intervalu je

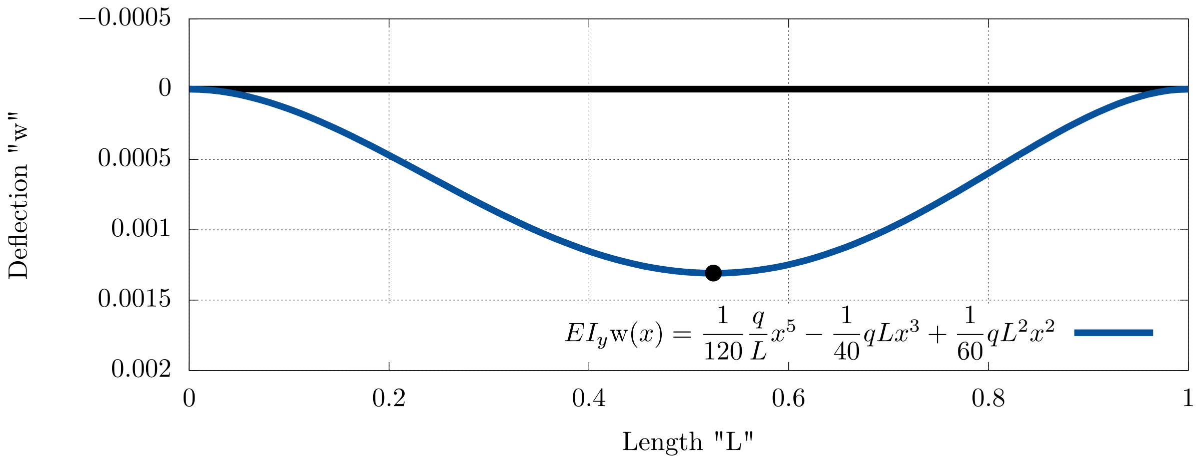
$$x_4 = \frac{\sqrt{105}-5}{10}L = 0,525L.$$

Maximální průhyb

$$
\begin{aligned}
EI_y \mathrm{w}\left(\frac{\sqrt{105}-5}{10}L\right) &= \frac{1}{120}\frac{q}{L}\left(\frac{\sqrt{105}-5}{10}L\right)^5 - \frac{1}{40}qL\left(\frac{\sqrt{105}-5}{10}L\right)^3 + \frac{1}{60}qL^2\left(\frac{\sqrt{105}-5}{10}L\right)^2 \\
&= \left(\frac{75-7\sqrt{105}}{2500}\right)qL^4 = 0,00131qL^4
\end{aligned}
$$







Řešení s využitím Maxima 5.43.2

```
/*
created 2020/10/28, kytyr@itam.cas.cz, Maxima 5.32.1
bending curve function on overconstrained beam
*/

kill(all); /* no mercy */
assume(L>0);
assume(q>0);
globalsolve: true;
```

Funkce průběhů vnitřních sil a průhybu

```
_qx:(q/L)*x; /* loading function*/
_Tx:integrate(_qx,x)+R; /* shear force */
_Mx:integrate(_Tx,x)+Mr; /* bending monent*/
_phix:-integrate(_Mx,x)+C1; /* angle */
_wx:integrate(_phix,x)+C2; /* deflection */
```

Okrajové podmínky

```
phi0:subst(0,x,_phix); /* B.C. phi(0) = 0 */
phiL:subst(L,x,_phix); /* B.C. phi(L) = 0 */
w0:subst(0,x,_wx); /* B.C. w(0) = 0 */
wL:subst(L,x,_wx); /* B.C. w(L) = 0 */
linsolve([phi0,phiL,w0,wL],[C1,C2,R,Mr]);
```

Výsledky

```
Tx:-integrate(_qx,x)+R; /* shear force */
Mx:integrate(Tx,x)+Mr; /* bending monent*/
phix:-integrate(Mx,x)+C1; /* angle */
wx:integrate(phix,x)+C2; /* deflection */
ctrl:subst(L,x,wx); /* control: zero deflection at the end */
```

Poloha maximálního průhybu

```
loc:solve([phix],[x]); /* position of max. deflection */
/* find root in (0,L) loop*/
root:-1; /* variable initialization */
for i:1 unless root>0 and root<L do /* loop */
root:rhs(loc[i]);
```

Maximální průhyb

```
wmax:subst(root,x,wx); /* max. deflection */
float(wmax);
```