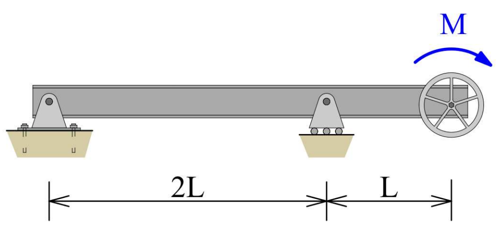
Zadání:
Stanovne minimální rozměry průřezu a čtvercové tyče délky $3L$ vyrobené z materiálu s modulem pružnosti E a mezí úměrnosti σ_{D} zatížené osamělým momentem M na převislém konci. Dále vyjádřete analytický předpis funkce průhybové čáry použitím i) Bernoulliho diferencílní rovnice ii) Mohrovi analogie a hodnotu průhybu a pootočení v místě působiště momentu.



Reakce v podporách

$$
\begin{aligned}
\rightarrow x: A_{\mathrm{x}} &= 0 \\
\curvearrowleft a: 2B_{\mathrm{z}}L - M &= 0 \\
B_{\mathrm{z}} &= \frac{M}{2L} \\
\curvearrowleft b: 2A_{\mathrm{z}}L - M &= 0 \\
A_{\mathrm{z}} &= \frac{M}{2L}
\end{aligned}
$$

Průběhy tečných sil a ohybových momentů

$\overrightarrow{x_1} \in \langle 0, 2L)$

$$
\begin{aligned}
T(x_1) &= -A_{\mathrm{z}} = -\frac{M}{2L} \\
M(x_1) &= -A_{\mathrm{z}}x_1 = -\frac{M}{2L}x_1
\end{aligned}
$$

$\overleftarrow{x_2} \in \langle 0, L)$

$$
\begin{aligned}
T(x_2) &= 0 \\
M(x_2) &= -M \\
M_{\max} &= |-M| = M
\end{aligned}
$$

Maximální napětí $\sigma_{\max}$ musí být v místě maximálního ohybového momentu $M_{\max}$ menší než napětí dovolené σ_{D}.

$$
\sigma_{\mathrm{D}} > \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_{\mathrm{y}}}e,
$$

kde excentricita e je maximální vzdálenost ve směru z mezi těžistěm a okrajem průřezu. Axiální kvadratický moment setrvačnosti čtvercového průřezu vyjádříme

$$
I_{\mathrm{y}} = \int\limits_{(A)} z^2 \mathrm{d}A = \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z^2 \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z^2 a\,\mathrm{d}z = a\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{1}{12}a^4
$$

```
Iy: integrate(z^2*integrate(1,y,-(a/2),(a/2)),z,-(a/2),(a/2)); /* axial moment of inertia */
```

Výpočet minimálního průměru

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{D}} &> \frac{M_{\max}}{I_{\mathrm{y}}}e = \frac{M}{\frac{1}{12}a^4}\frac{a}{2} = \frac{6M}{a^3} \\
a &> \sqrt[3]{\frac{6M}{\sigma_{\mathrm{D}}}}
\end{aligned}
$$

```
eqD: sigma=(abs(-M)/Iy)*(a/2); /* design formula */
solve(eqD,a); /* minimal edge */
```

Při vyšetřování průhybu nosníku analytickým způsobem vycházíme z (Bernoulliho) diferenciální rovnice průhybové čáry

$$\mathrm{w}''(x) \quad = \quad -\frac{M(x)}{EI_y}$$

jejímž řešením získáme funkce průhybu $\mathrm{w}(x)$ a úhlu pootočení $\varphi(x) = \mathrm{w}'(x)$.

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{x_1} \in \langle 0, 2L)\\
EI_y\mathrm{w}''(x_1) &= -M(x_1) = \frac{M}{2L}x_1\\
EI_y\varphi(x_1) &= \frac{M}{2L}\frac{x_1^2}{2} = \frac{1}{4}\frac{M}{L}x_1^2 + C_1\\
EI_y\mathrm{w}(x_1) &= \frac{1}{4}\frac{M}{L}\frac{x_1^3}{3} + C_1x_1 + C_2 = \frac{1}{12}\frac{M}{L}x_1^3 + C_1x_1 + C_2
\end{aligned}$$

Integrační konstanty C_1, C_2 vyjádříme z okrajových podmínek podepření nosníku $\mathrm{w}(0) = 0$, $\mathrm{w}(2L) = 0$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{w}(0) &= 0 = C_2\\
C_2 &= 0\\
\mathrm{w}(2L) &= 0 = \frac{1}{12}\frac{M}{L}(2L)^3 + C_1 2L = \frac{8}{12}ML^2 + C_1 2L\\
C_1 &= -\frac{1}{3}ML\\
EI_y\varphi(x_1) &= \frac{1}{4}\frac{M}{L}x_1^2 - \frac{1}{3}ML\\
EI_y\mathrm{w}(x_1) &= \frac{1}{12}\frac{M}{L}x_1^3 - \frac{1}{3}MLx_1
\end{aligned}$$

```
/* for x1 in <0,2L) */
_M1:-(M/(2*L))*x; /* bending moment function */
_phi1:-integrate(_M1,x)+C1;  /* angle function */
_w1:integrate(_phi1,x)+C2; /* deflection function */
w10:subst(0,x,_w1); /* B.C. w(0)=0 */
w12L:subst(2*L,x,_w1); /* B.C. w(2L)=0 */
linsolve([w10,w12L],[C1,C2]);

/* results */
phi1:-integrate(_M1,x)+C1; /* angle function */
w1:integrate(phi1,x)+C2; /* deflection function */
```

$$\begin{aligned}
&\overleftarrow{x_2} \in \langle 0, L)\\
EI_y\mathrm{w}''(x_2) &= -M(x_2) = M\\
EI_y\varphi(x_2) &= Mx_2 + C_3\\
EI_y\mathrm{w}(x_2) &= \frac{1}{2}Mx_2^2 + C_3x_2 + C_4
\end{aligned}$$

Integrační konstanty C_3, C_4 vyjádříme z okrajových podmínek podepření nosníku $-\varphi(2L) = \varphi(L)$, $\mathrm{w}(L) = 0$.

$$\begin{aligned}
-\varphi(2L) &= \varphi(L) \\
-\frac{1}{4}\frac{M}{L}(2L)^2 + \frac{1}{3}ML &= ML + C_3 \\
C_3 &= -\frac{5}{3}ML \\
EI_y\varphi(x_2) &= Mx_2 - \frac{5}{3}ML \\
\mathrm{w}(x_2) &= \frac{1}{2}Mx_2^2 - \frac{5}{3}MLx_2 + C_4 \\
\mathrm{w}(L) &= 0 = \frac{1}{2}ML^2 - \frac{5}{3}ML^2 + C_4 \\
C_4 &= \frac{7}{6}ML^2 \\
\mathrm{w}(x_2) &= \frac{1}{2}Mx_2^2 - \frac{5}{3}MLx_2 + \frac{7}{6}ML^2
\end{aligned}$$

```
/* for x2 in <0,L) */
_M2:-M; /* bending moment function */
_phi2:-integrate(_M2,x)+C3;  /* angle function */
_w2:integrate(_phi2,x)+C4; /* deflection function */
phi2_L:subst(L,x,_phi2);   /* B.C. -phi(2L)=phi(L) */
phi1_2L:subst(2*L,x,phi1);
w2L:subst(L,x,_w2); /* B.C. w(L)=0 */
linsolve([phi2_L+phi1_2L,w2L],[C3,C4]);

/* results */
phi2:-integrate(_M2,x)+C3; /* angle function */
w2:integrate(phi2,x)+C4; /* deflection function */
```

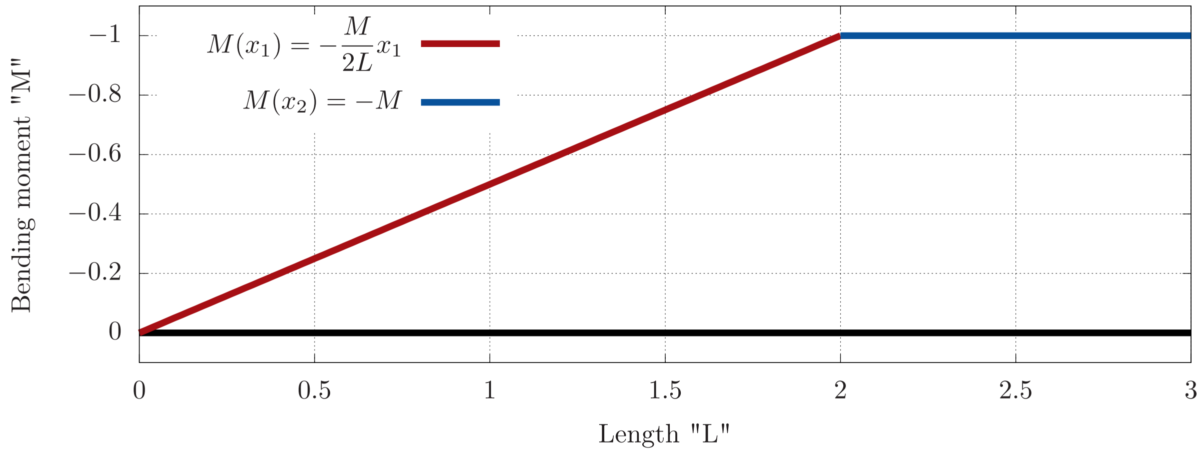
Hodnotu průhybu a pootočení v místě působiště momentu.

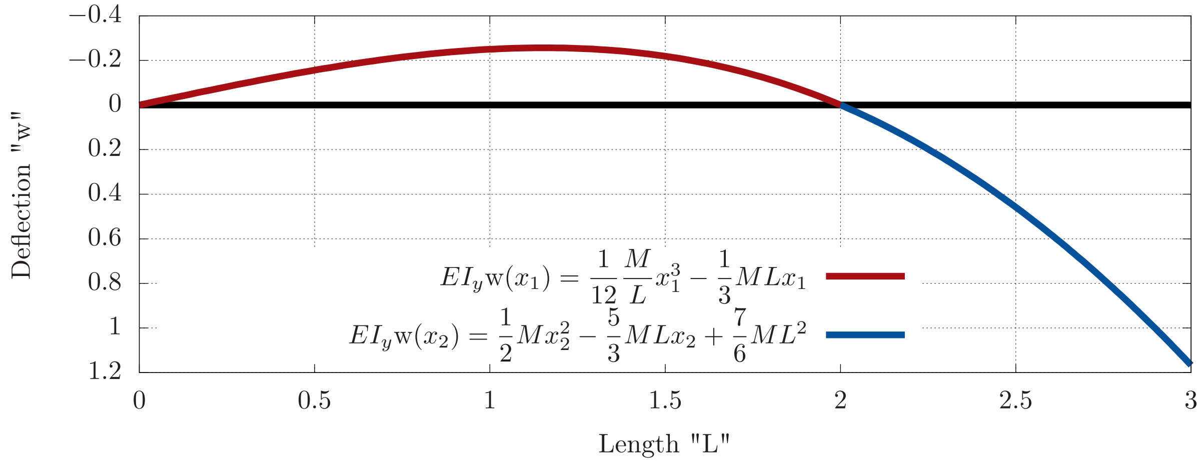
$$\begin{aligned}
EI_y\varphi(0) &= -\frac{5}{3}ML \\
EI_y\mathrm{w}(0) &= \frac{7}{6}ML^2
\end{aligned}$$

V tomto speciálním případě lze úhel pootočení nosníku v místě zatíženém osamělým momentem vyjádřit z rovnosti vnějšího zatížení a deformační energie

$$\begin{aligned}
W_M &= U_{\mathrm{def}} \\
\frac{1}{2}M\varphi_M &= \int\limits_{(L)} \frac{M^2(x)}{2EI_y}\mathrm{d}x = \frac{1}{2EI_y}\left(\int\limits_0^{2L}\left(-\frac{M}{2L}x\right)^2\mathrm{d}x + \int\limits_0^{L}(-M)^2\,\mathrm{d}x\right) \\
M\varphi_M EI_y &= \frac{M^2}{4L^2}\frac{8L^3}{3} + M^2L = \frac{2}{3}M^2L + M^2L \\
EI_y\varphi_M &= \frac{5}{3}ML
\end{aligned}$$

```
Udef:(integrate(M1^2,x,0,2*L)+integrate(M2^2,x,0,L))/(2*E*Iy); /* deformation energy */
Wext:(1/2)*M*phiM; /* external work */
solve([Wext=Udef],[phiM]);
```





Mohrova metoda využívá analogie mezi funkcemi pootočení a průhybu zatíženým vnějším působením a vnitřních sil na takzvaném fiktivním nosníku zatíženým skutečnou momentovou plochou

$$\begin{aligned} EI_y\varphi(x) &= T_\mathrm{f}(x) \\ EI_y\mathrm{w}(x) &= M_\mathrm{f}(x). \end{aligned}$$

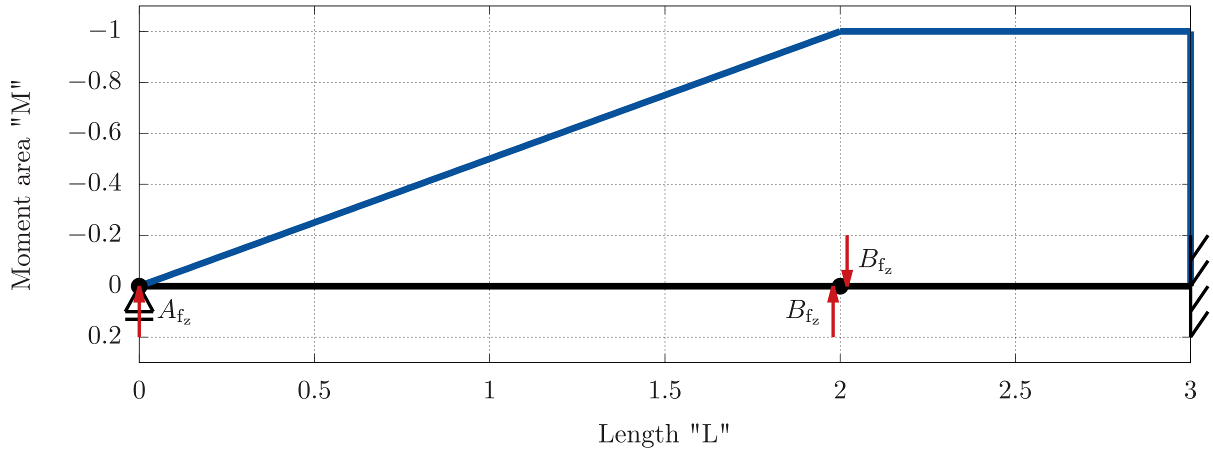
Jako fiktivní nosník označujeme myšlenou kostrukci podepřenou tak, že její okrajové podmínky ohybohého momentu odpovídají okrajovým podmínkám průhybu reálné konstrukce. Podepření fiktivního nosníku je nazávislé na jeho zažížení. Využitím této metody odpadá nutnost vyjadřování integračních konstant. Momezující podmínkou pro graficko-analytické řešení je znalost velikosti momentových ploch a jejich těžišt. Metoda je zejména vhodná pro analýzu nosníků zatížených osamělými silami a momenty.

Pro nosník s převislým koncem platí okrajové podmínky

$$\mathrm{w}(0) = 0 \quad \mathrm{w}(2L) = 0 \quad \mathrm{w}(3L) \neq 0,$$

proto podepření fiktivního nosníku musí odpovídat

$$M_\mathrm{f}(0) = 0 \quad M_\mathrm{f}(2L) = 0 \quad M_\mathrm{f}(3L) \neq 0.$$



Výpočet reakcí

$$\begin{aligned}
\curvearrowleft a : B_{\mathrm{f_z}} 2L - \frac{1}{2} M 2L \frac{4}{3} L &= 0 \\
B_{\mathrm{f_z}} &= \frac{2}{3} ML \\
\curvearrowleft b : -A_{\mathrm{f_z}} 2L + \frac{1}{2} M 2L \frac{2}{3} L &= 0 \\
A_{\mathrm{f_z}} &= \frac{1}{3} ML
\end{aligned}$$

Průhyb nosníku

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{x_1} \in \langle 0, 2L) & \\
EI_y \varphi(x_1) = T_{\mathrm{f}}(x_1) &= -A_{\mathrm{f_z}} + \frac{1}{2} \frac{M}{2L} x_1 \cdot x_1 = \frac{1}{4} \frac{M}{L} x_1^2 - \frac{1}{3} ML \\
EI_y \mathrm{w}(x_1) = M_{\mathrm{f}}(x_1) &= -A_{\mathrm{f_z}} x_1 + \frac{1}{2} \frac{M}{2L} x_1 \frac{x_1}{3} = \frac{1}{12} \frac{M}{L} x_1^3 - \frac{1}{3} MLx_1 \\
\overrightarrow{x_3} \in \langle 0, L) & \\
EI_y \varphi(x_3) = T_{\mathrm{f}}(x_3) &= B_{\mathrm{f_z}} + Mx_3 = Mx_3 + \frac{2}{3} ML \\
EI_y \mathrm{w}(x_3) = M_{\mathrm{f}}(x_3) &= B_{\mathrm{f_z}} + Mx_3 \frac{x_3}{2} = \frac{1}{2} Mx_3^2 + \frac{2}{3} MLx_3 \\
EI_y \varphi(L) &= ML + \frac{2}{3} ML = \frac{5}{3} ML \\
EI_y \mathrm{w}(L) &= \frac{1}{2} ML^2 + \frac{2}{3} ML^2 = \frac{7}{3} ML^2
\end{aligned}$$