Teoretická a aplikovaná mechanika
Přednáška 6
Zákon zpevnění. Podmínka tečení. Druckerovy postuláty stability.

Ondřej Jiroušek

Ústav mechaniky a materiálů
Fakulta dopravní ČVUT

Zatěžovací kritéria

Podmínka plasticity a zatěžovací kritéria

- Pro matematický popis napjatosti při inkrementální plasticitě
- Cyklické zatěžování $(+\sigma, -\sigma)$ 
- Rozhodnutí, zda jde o elasto-plastické zatěžování, nebo o elastické odtěžování

Podmínka plasticity, např. pro $\sigma_{y.t} = \sigma_{y.c}$ můžeme psát: $f = \sigma^2 - k^2$:

$f < 0$ ... elastický stav ✓ $f \leq 0$ $f < 0$ ✓ $f = 0$?

$\boxed{f = 0}$ ... plastický stav

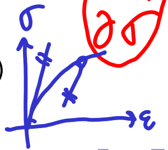
Rozhodovací podmínka, zda jde o zatěžování (elasto-plastické) nebo odtěžování (vždy elastické):

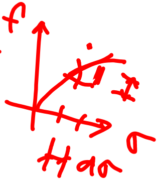
$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \sigma}\mathrm{d}\sigma$$

$\frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma$

f=0 $\wedge$ $\mathrm{d}f > 0$ ... zatěžování (elasto-plastické)

f=0 $\wedge$ $\mathrm{d}f < 0$ ... odtěžování (elastické)





Zákon tečení

Zákon tečení (a podmínka normality)

- asociovaný
- neasociovaný

Podmínka plasticity, např. pro $\sigma_{y.t} = \sigma_{y.c}$ můžeme psát: $f = \sigma^2 - k^2$:
$f < 0$ ... elastický stav
$f = 0$ ... plastický stav
Rozhodovací podmínka, zda jde o zatěžování (elasto-plastické) nebo odtěžování (vždy elastické):

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \mathrm{d}\sigma$$

f=0 $\wedge \mathrm{d}f > 0$ ... zatěžování (elasto-plastické)
f=0 $\wedge \mathrm{d}f < 0$ ... odtěžování (elastické)

Zákon tečení

$\sigma \sim \varepsilon$

$d\sigma \sim d\varepsilon$

Přírůstek deformace rozložme na elastickou a plastickou část:

$$\boxed{d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p}$$

Přírůstek plastické deformace je vždy kolmý k aktuální ploše plasticity:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

kde $d\lambda$ je nezáporný skalár, jehož velikost určuje velikost přírůstku plastické deformace,
a $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ gradient = směr přírůstku plastické deformace

Směr tečení je kolmý k aktuální ploše plasticity. //

Asociovaný a neasociovaný zákon tečení

Velikost přírůstku plastické deformace $\mathrm{d}\varepsilon^p$ je neznámá, vypočtu pomocí velikosti $\mathrm{d}\lambda$ (ukážeme později jak).

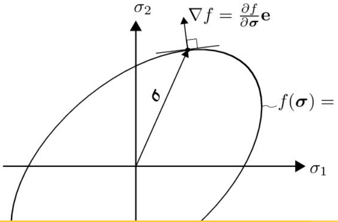
Asociovaný versus neasociovaný zákon tečení:

$$\mathrm{d}\varepsilon^p = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$

... asociovaný zákon tečení (asociovaný s podmínkou plasticity)

$$\mathrm{d}\varepsilon^p = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma}$$

... neasociovaný zákon tečení (g - plastický potenciál; udává směr přírůstku plastické deformace)



Zákon zpevnění. Hardening rule.

- zákon zpevnění
  - isotropní
  - kinematický
  - kombinovaný

$\sigma = E\varepsilon \rightarrow \underline{d\sigma = E^{2} d\varepsilon}$

$f(J_2, k) = 0$

parametr zpevnění κ
funkce zpevnění k

$$\boxed{k = k(\kappa)} \tag{1}$$

Pomocí funkce zpevnění je popsána historie plastického zatížení

- κ
  - efektivní plastická deformace $\bar{\varepsilon}_p = \int \sqrt{d\varepsilon_p d\varepsilon_p}$
  - plastická práce $W_p = \int \sigma d\varepsilon_p$

$\bar{\varepsilon}_p \cdots$ kumulativní plastická deformace (vždy rostoucí funkce $\nearrow$)
$W_p \cdots \sim$ disipace energie při plastické deformaci $(\nearrow)$
potom platí

$$d\varepsilon_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Rightarrow d\kappa = h d\lambda \tag{2}$$

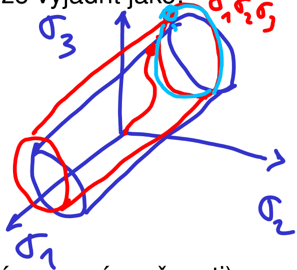
kde h je skalární funkce

- h ve výrazu pro přírůstek plastické deformace $d\varepsilon_p$ lze vyjádřit jako:
  - pro $\bar{\varepsilon}_p$:

$$h = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma}}$$

  - pro W_p:

$$h = \sigma \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$



Podmínka konzistence. Constistency condition.
V průběhu plastického přetváření materiálu (zatěžování za mezí pružnosti) napjatost v každém materiálovém bodě tělesa zůstává na hranici elastické oblasti:
$\rightarrow$ Plocha plasticity se mění tak, aby stav napjatosti zůstával na ploše plasticity v každém časovém okamžiku zatěžování.

$$f(\sigma, h(\kappa)) = 0$$

$$f\left(\sigma + d\sigma, \kappa + d\kappa\right) = 0 \tag{3}$$

v přírůstkovém tvaru:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \tag{4}$$

Přírůstková plasticita. Incremental plasticity.

v elastickém stavu platí:

$\sigma = E\varepsilon$ 1-D

$$d\sigma = E d\varepsilon \qquad \text{(rovněž platí pro elastické odtěžování)} \tag{5}$$

rozklad tenzoru deformace:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \tag{6}$$

V přírůstkovém tvaru můžeme zapsat vztah napětí-deformace takto:

$$d\sigma = E d\varepsilon^e \tag{7}$$

$d\varepsilon^e = d\varepsilon - d\varepsilon^p$

(Neboť pouze přírůstek elastické deformace má za následek přírůstek napětí)

Nyní dosaďme zákon tečení: $d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}$ do rovnice (6)

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Rightarrow d\varepsilon^e = d\varepsilon - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \qquad \text{a tento výsledek do (7)} \tag{8}$$

$$d\sigma = E\left(d\varepsilon - d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}\right) \tag{9}$$

E

Nyní potřebujeme tuto rovnici vyjádřit ve tvaru $d\sigma = ? \cdot d\varepsilon$
Z rovnice (9) nejprve vyjádříme $d\lambda$:

$d\sigma = ?\, d\varepsilon$

$$d\lambda = \frac{E d\varepsilon - d\sigma}{E \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \tag{10}$$

Z rovnice 4 lze přírůstek napětí $d\sigma$ vyjádřit jako:

$$d\sigma = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa}{\frac{\partial f}{\partial \sigma}} \tag{11}$$

A pak již snadno odvodíme:

$$d\lambda = \frac{E d\varepsilon + \frac{\frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa}{\frac{\partial f}{\partial \sigma}}}{E \frac{\partial f}{\partial \sigma}} = \frac{\frac{E \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\varepsilon + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa}{\frac{\partial f}{\partial \sigma}}}{E \frac{\partial f}{\partial \sigma}} = \frac{E \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\varepsilon + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa}{E \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^2} = \frac{E \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\varepsilon + \frac{\partial f}{\partial \kappa} h d\lambda}{E \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^2} \tag{12}$$

$$E \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^2 d\lambda - \frac{\partial f}{\partial \kappa} h d\lambda = E \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\varepsilon \tag{13}$$

$$d\lambda = \frac{E \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\varepsilon}{E \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^2 - \frac{\partial f}{\partial \kappa} h} \tag{14}$$

Dosaďme výraz pro $d\lambda$ do následujícího výrazu:

$$d\lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \kappa} h d\lambda}{\frac{\partial f}{\partial \sigma}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} h \left(\frac{E \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\varepsilon}{E \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^2 - \frac{\partial f}{\partial \kappa} h} \right)}{\frac{\partial f}{\partial \sigma}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \kappa} h E \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\varepsilon}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \left[E \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^2 - \frac{\partial f}{\partial \kappa} h \right]} \quad (15)$$

$d\sigma$

$d\sigma$

$$d\sigma = \boxed{E \frac{-\frac{\partial f}{\partial \kappa} h}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^2 E - \frac{\partial f}{\partial \kappa} h}} d\varepsilon \quad (16)$$

$d\sigma = E_t\, d\varepsilon$

$$d\sigma = E_t d\varepsilon \quad (17)$$

tečná tuhost

where:

$$E_t = E \frac{-\frac{\partial f}{\partial \kappa} h}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^2 E - \frac{\partial f}{\partial \kappa} h} \quad (18)$$

For the 1-D plasticity this could have been developed from:
in:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \tag{19}$$

insert:

$$d\kappa = h d\lambda; \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \tag{20}$$

$$d\lambda = \frac{d\kappa}{h} = \frac{-\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma}{\frac{\partial f}{\partial \kappa}}}{h} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma}{\frac{\partial f}{\partial \kappa} h} \tag{21}$$

$$d\varepsilon^p = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma}{\frac{\partial f}{\partial \kappa} h} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial \kappa} h} d\sigma \tag{22}$$

$$d\varepsilon = d\varepsilon^p + d\varepsilon^p \tag{23}$$

$$d\sigma = E d\varepsilon^e \tag{24}$$

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E} + d\varepsilon^p = \frac{1}{E}d\sigma - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial \kappa}h}d\sigma \qquad (25)$$

$\frac{1}{E_t}$

$$d\varepsilon = \left[\frac{1}{E} - \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial \kappa}h}\right]d\sigma = \frac{\frac{\partial f}{\partial \kappa}h - E\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^2}{E\frac{\partial f}{\partial \kappa}h}d\sigma \qquad (26)$$

We see, we have developed the inverse relation: $d\varepsilon = \frac{1}{E_t}d\sigma$ $d\sigma = E_t d\varepsilon$

This deriavation was more general (simple inverse?)

- In 3-D plasticity:

  $$d\sigma_{ij} = D^{ep}_{ijkl}d\varepsilon_{kl}$$
  $$d\varepsilon_{ij} = C^{ep}_{ijkl}d\sigma_{kl}$$

  where D_{ijkl}, C_{ijkl} are tensors of the 4th order! (inversion not simple)

Geometric interpretation of E_t for 1-D plasticity:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \tag{27}$$

$$d\sigma = E d\varepsilon^e \tag{28}$$

$$d\sigma = E_t \, d\varepsilon \tag{29}$$

$$\frac{1}{E_t} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_p}; \quad \frac{1}{E_t} = \frac{d\varepsilon^e + d\varepsilon^p}{d\sigma} \tag{30}$$

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^e + d\varepsilon^p}$$

$$\frac{1}{E_t} = \frac{d\varepsilon^e + d\varepsilon^p}{d\sigma}$$

$$d\sigma = E_t \, d\varepsilon$$

$$= \frac{d\varepsilon^e}{d\sigma} + \frac{d\varepsilon^p}{d\sigma}$$

$$\frac{1}{E} \qquad \frac{1}{E_p}$$

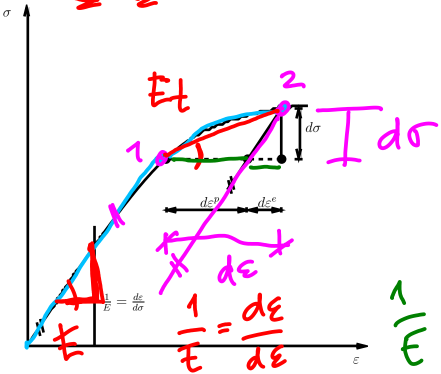


Figure: Geometric interpretation of the 1D plasticity

Flow rule

- plastic strain increment is perpendicular to the yield surface:

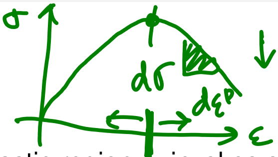
$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \qquad d\lambda\text{– non-negative scalar;} \qquad \frac{\partial f}{\partial \sigma}\text{– gradient vector} \tag{31}$$

$|d\varepsilon^p|$– unknown, will be computed from $d\lambda$

- flow rule:
  - associated $d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}$
  - non-associated $d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma}$ g– plastic potential

Drucker's postulates

< zpevňující
změkčující



- tensional experiment with steel bar (1950s)

Increment of stress $(\pm)d\sigma$ in any stress state in plastic region σ_t invokes strain increment $(\pm)d\varepsilon$, which has the same sign as the stress increment:

$+d\sigma \to +d\varepsilon$

$$d\sigma d\varepsilon \geq 0 \to d\sigma\left(d\varepsilon^e + d\varepsilon^p\right) \geq 0 \quad \checkmark \tag{32}$$

$d\sigma d\varepsilon$

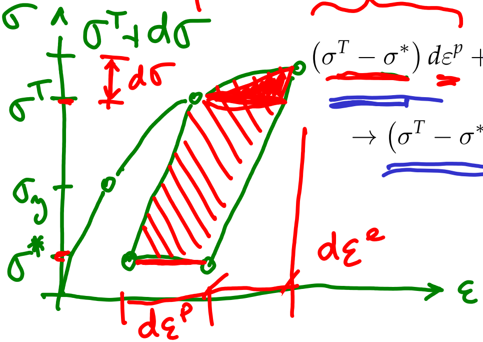
Increment of elastic energy is always positive: $\quad d\sigma d\varepsilon^e > 0$

$-d\sigma \to -d\varepsilon$

$$d\sigma d\varepsilon^p \geq 0 \qquad \text{Drucker's postulate \# 1} \tag{33}$$

Dissipation of energy during A-B-C-D loading cycle:

Total work done by the increment of (plastic) stress on induced strain must be NONZERO.
Energy= Area (ABCD)



$A_{\text{trapezoid}}$ $\quad$ $A_{\triangle}$ $\quad$ $A_{\text{trapezoid}} > 0$

$$\underbrace{\left(\sigma^T - \sigma^*\right) d\varepsilon^p}_{} + \frac{1}{2} d\sigma d\varepsilon^p \geq 0 \tag{34}$$

$$\rightarrow \left(\sigma^T - \sigma^*\right) d\varepsilon^p \geq 0 \tag{35}$$

$\ll$ 1. součinit

Now we can consider the σ^* (stress to which we unload) can be zero (full unloading):

$$\rightarrow \sigma^* = 0 \rightarrow \sigma^T d\varepsilon^p \geq 0 \qquad \text{Drucker's postulate \# 2} \tag{36}$$

It means that increment of plastic work (work on plastic deform) is always NON-NEGATIVE.
More generally (3-D) the Drucker's postulates:

$$\boxed{\begin{aligned} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p &\geq 0 \\ \left(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*\right) d\varepsilon_{ij}^p &\geq 0 \end{aligned}} \qquad \text{principal of maximum plastic resistance} \tag{37}$$

$$d\sigma d\varepsilon^p \geq 0$$

$$(\sigma - \sigma^*) d\varepsilon^p \geq 0$$