Teoretická a aplikovaná mechanika Přednáška 5 Haigh-Westergaardův prostor. Lodeho parametry. Podmínka plasticity. Bauschingerův efekt. Zákon zpevnění.

Ondřej Jiroušek

Ústav mechaniky a materiálů
Fakulta dopravní ČVUT

Haighův-Westergaardův prostor

Vzpomeňme, že v H-W prostoru jsou definovány dvě množiny bodů:

- Hydrostatická osa
- Deviátorová rovina

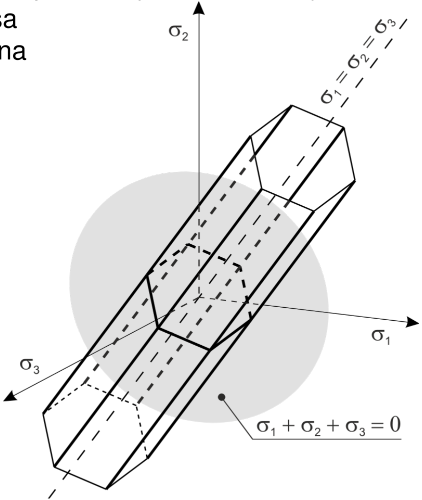


Figure: Tresca v HW prostoru

Prostor napětí, Lodeho parametry

Polohu bodu přímo hodnoty hlavních napětí, ale pro potřeby teorie plasticity může být vhodnější použít *válcový souřadný systém*, jehož osy jsou definovány pomocí trojice navzájem kolmých jednotkových vektorů:

$\mathbf{n}_{\mathrm{h}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$... směr osy hydrostatického napětí $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$,

$\mathbf{n}_{\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$... směr osy smykové napjatosti, tj. osy $\sigma_1 = -\sigma_3$ ležící v deviátorové rovině $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$,

$\mathbf{n}_{\mathbf{s}_2} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$... směr osy ležící v deviátorové rovině a která je kolmá na obě výše popsané osy. Jedná se o kolmý průmět osy středního hlavního napětí σ_2, do deviátorové roviny.

Prostor napětí

Polohu bodu v HW prostoru lze určit pomocí hodnot hlavních napětí, ale pro potřeby teorie plasticity může být vhodnější použít válcový souřadný systém, jehož osy jsou definovány pomocí trojice navzájem kolmých jednotkových vektorů: Napěťový bod je definován trojicí hl. napětí, nebo tzv. Lodeho parametry:

$$P\left(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\right) \sim P(x,y,z) \sim P(r,\theta,\xi) \sim P(J_2,\theta,\xi) \tag{1}$$

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right) \tag{2}$$

$$r = \sqrt{2J_2} \tag{3}$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{3}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]} = \sqrt{3}\tau_8 = \sqrt{2J_2} = 2\tau_m \tag{4}$$

Prostor hlavních napětí

Napěťový bod:

$$P\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right) \sim P(x, y, z) \sim P(r, \theta, \xi) \sim P(J_2, \theta, \xi)$$

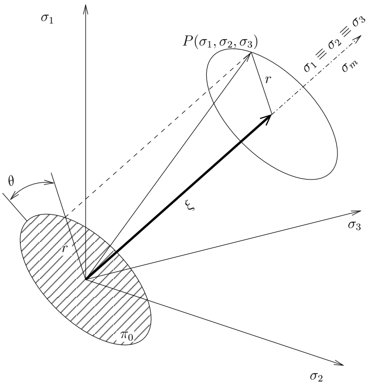


Figure: Napěťový bod v H-W prostoru, Lodeho parametry

Lodeho parametry – μ
Lode vycházel z Mohrova kritéria mezního stavu pružnosti, když pro vyjádření středního hlavního napětí zvolil lineární kombinaci největšího smykového napětí, $\tau_{\max}$, a normálového napětí působícího ve stejné rovině, jako největší smykové napětí, $\sigma_{\tau_{\max}}$, ve tvaru

$$\sigma_2 = \sigma_{\tau_{\max}} + \mu \cdot \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \mu \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \tag{5}$$

kde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ jsou velikosti hlavních napětí a μ je Lodeho (napěťový) parameter.
Lodeho parametr lze tedy vyjádřit vztahem

$$\mu = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}\,. \tag{6}$$

Lodeho parametr μ může nabývat hodnot z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, přičemž platí, že když $\mu = -1$, pak $\sigma_2 = \sigma_3$, a když $\mu = 1$, pak $\sigma_2 = \sigma_1$.

Lodeho parametry – ρ

Průmět vektoru hlavních napětí $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, tj. polohového vektoru spojující bod v Haighově prostoru s počátkem souřadnic, do směru hydrostatické osy, která je osou válcového souřadného systému, je vektor:

$$\rho = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}(1, 1, 1) = \sigma_\mathrm{h}(1, 1, 1) = \frac{\mathrm{I}_1}{3}(1, 1, 1) = \frac{\mathrm{I}_1}{\sqrt{3}}\mathbf{n}_\mathrm{h}\,, \tag{7}$$

kde σ_h je hydrostatické napětí a I_1 je první invariant tenzoru napětí:

$$\mathrm{I}_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\,. \tag{8}$$

Lodeho parametry – r, J_2

Průmět vektoru hlavních napětí $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ do deviátorové roviny je vektor deviátorového napětí

$$\mathbf{r} = (\sigma_1 - \sigma_\mathrm{h}, \sigma_2 - \sigma_\mathrm{h}, \sigma_3 - \sigma_\mathrm{h}) = (s_1, s_2, s_3)\,, \tag{9}$$

kde s_1, s_2, s_3 jsou *hlavní deviátorová napětí*, pro která platí

$$s_1 + s_2 + s_3 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 3 \cdot \sigma_\mathrm{h} = 0\,. \tag{10}$$

Velikost průmětu vektoru hlavních napětí do deviátorové roviny, tj. deviátorového napětí, je

$$\|\mathbf{r}\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = \sqrt{2\mathrm{J}_2}\,,$$

kde J_2 je druhý invariant deviátoru tenzoru napětí:

$$\mathrm{J}_2 = -s_1 s_2 - s_2 s_3 - s_1 s_3 = \frac{1}{2} \cdot (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)\,.$$

Teorie plasticity - úvod, základní myšlenky

Plasticita– 3 části:

1. podmínka plasticity (yield criterion)
2. zákon zpevnění (hardening rule)
3. zákon tečení (flow rule)

Podmínka plasticity

$$f\left(\sigma_{ij}, k\right) = 0 \tag{11}$$

$$\begin{array}{ll} f(\sigma_{ij,k}) < 0 & \text{elastický stav} \\ f(\sigma_{ij,k}) = 0 & \text{plastický stav} \end{array} \tag{12}$$

tenzor σ_{ij} je vyjádřen pomocí: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ hlavních napětí

I_1, I_2, I_3 nebo pomocí invariantů

podmínka plasticity:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k) = 0 \tag{13}$$

$$f(I_1, J_2, J_3, k) = 0 \tag{14}$$

Chování materiálu při cyklickém zatěžování.

Chování materiálu při cyklickém zatěžování
Hysterezní smyčka
Chování materiálu při cyklickém zatěžování za mez plasticity. Zatěžování může být pouze tahové, nebo pouze tlakové (monotónní zatěžování), nebo může mít charakter $(+\sigma, -\sigma) \Longrightarrow$ BE.

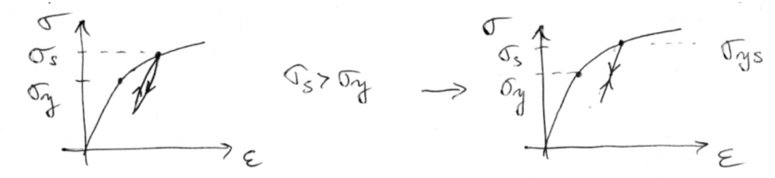


Figure: Hysterezní smyčka při odlehčení z napětí za mezí kluzu

Zákon zpevnění. Hardening rule. Motivace

Bauschingerův efekt
U kovů, které se plasticky deformují, závisí mechanická odezva nejen na jejich aktuálním stavu napjatosti, ale také na *historii deformace*.

Bauschingerův efekt se týká vlastnosti materiálů, kde se charakteristiky napětí/deformace materiálu mění v důsledku mikroskopických změn v materiálu. Například ke zvýšení meze kluzu v tahu dochází na úkor meze kluzu v tlaku.

Bauschingerův efekt obecný jev, který se vyskytuje ve většině polykrystalických kovů. Základní mechanismus Bauschingerova efektu souvisí s dislokační strukturou za studena zpracovaného kovu. Když dojde k plastické deformaci, dislokace se budou hromadit v bariérách a vytvářet dislokační shluky. Na základě výsledků experimentů se obvykle používají dva typy mechanismů k vysvětlení Bauschingerova efektu.

Zákon zpevnění. Hardening rule. Motivace

Bauschingerův efekt
Znalost Bauschingerova efektu je důležitým předpokladem pro pochopení cyklického únavového chování kovových materiálů

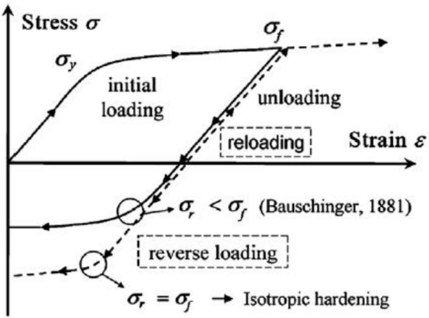


Figure: Bauschingerův efekt - izotropní zpevnění

Zákon zpevnění. Hardening rule. Motivace

Bauschingerův efekt $(+\sigma, -\sigma)$

$\sigma_{yo.t}$ – počáteční mez kluzu v tahu

$\sigma_{y1.t}$ – následná mez kluzu v tahu

$\sigma_{yo.c}$ – počáteční mez kluzu v tlaku

$\sigma_{y1.c}$ – následná mez kluzu v tlaku

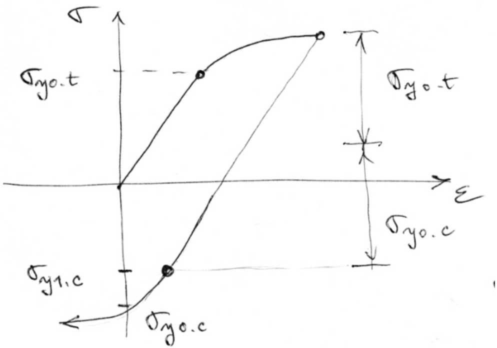


Figure: Bauschingerův efekt - značení, počáteční a následné meze kluzu

Zákon zpevnění. Hardening rule. Motivace

Bauschingerův efekt $(+\sigma, -\sigma)$

$\sigma_{yo.t}$ (T_0) – počáteční mez kluzu v tahu

$\sigma_{y1.t}$ (T_1) – následná mez kluzu v tahu

$\sigma_{yo.c}$ (C_0) – počáteční mez kluzu v tlaku

$\sigma_{y1.c}$ (C_1) – následná mez kluzu v tlaku

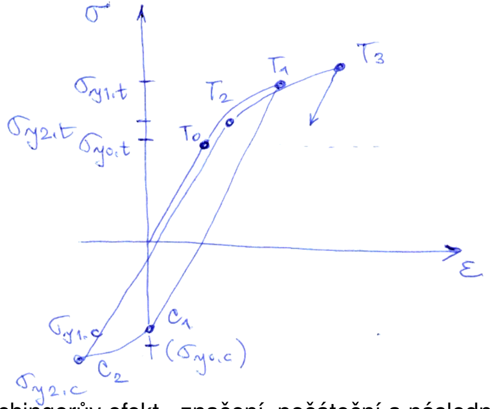


Figure: Bauschingerův efekt - značení, počáteční a následné meze kluzu

Zákon zpevnění: kinematický, izotropní, kombinovaný

Důležitým důsledkem Bauschingerova effektu je fakt, že následné meze kluzu ($\sigma_{yi.t}, \sigma_{yi.c}$) jsou funkcemi *historie plastických deformací*.

Zákony zpevnění

- a) kinematický zákon zpevnění (plocha plasticity se přemisťuje)
- c) izotropní zákon zpevnění (plocha plasticity se zvětšuje (nafukuje))
- b) kombinovaný zákon zpevnění (kombinace kinematického a izotropního z.z.)

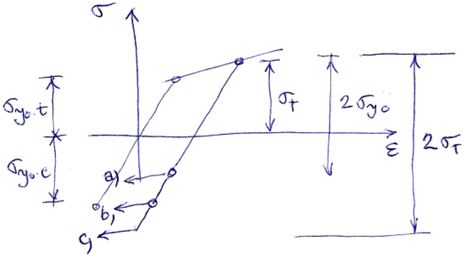


Figure: Bauschingerův efekt - zákony zpevnění

Zákon zpevnění: kinematický, izotropní, kombinovaný

Důležitým důsledkem Bauschingerova effektu je fakt, že následné meze kluzu $(\sigma_{yi.t}, \sigma_{yi.c})$ jsou funkcemi *historie plastických deformací*.

Zákony zpevnění - matematický zápis

- a) kinematický zákon zpevnění (plocha plasticity se přemisťuje)

$$f(\sigma, \alpha) = (\sigma - \alpha)^2 - \sigma_{y0}$$

- c) izotropní zákon zpevnění (plocha plasticity se zvětšuje (nafukuje))

$$f(\sigma, k) = \sigma^2 - k^2$$

- b) kombinovaný zákon zpevnění (kombinace kinematického a izotropního z.z.)

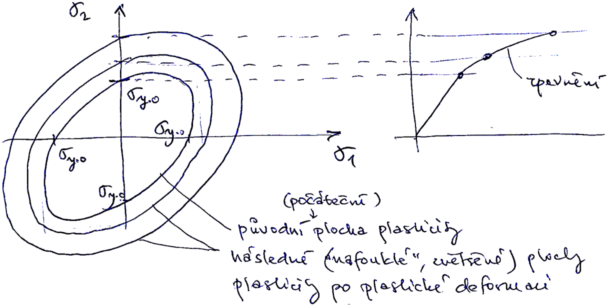
$$f(\sigma, \alpha, k) = [\sigma - (1 - M)\,\alpha]^2 - [(\sigma - M)\,\sigma_0 + Mk]^2$$

kde $M \in \langle 0; 1 \rangle$ je parametr, který vyjadřuje “míru” izotropnosti, t.j. M=0 dává izotropní z.z. a M=1 dává kinematický z.z.

Izotropní zákon zpevnění

Izotropní zpevnění

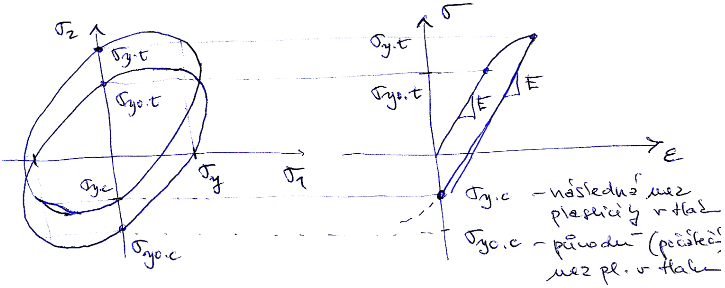
- Zvětšení plochy plasticity je stejné ve všech směrech v Haigh-Westergaardově prostoru napětí.
- Izotropní zpevnění je vhodné pro monotónně se zvětšující zatížení (proportional loading).
- Pro zatěžování se střídajícím se znaménkem (tah i tlak) $(+\sigma, -\sigma)$ dává špatný výsledek pro následnou mez kluzu.



Kinematický zákon zpevnění

Kinematické zpevnění

- Nevýhodou izotropního zpevnění je velká elastická oblast při opačném zatěžování (oproti výsledkům experimentů)
- Kinematické zpevnění lépe vystihuje Bauschingerův efekt



Kombinovaný zákon zpevnění

Kombinované zpevnění

- Vhodné i pro cyklickou plasticitu (v každém cyklu je dominantní kinematické zpevnění).
- Cyklické zatěžování $(+\sigma, -\sigma)$
- Pro velký počet zatěžovacích cyklů materiál zpevňuje také izotropně.