Teoretická a aplikovaná mechanika
Přednáška 4
Podmínky plasticity

Ondřej Jiroušek

Ústav mechaniky a materiálů
Fakulta dopravní ČVUT

Tenzor napětí. Podmínka plasticity.

- tenzor napětí (v materiálovém bodě x, y, z:)

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ sym & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{1}$$

- hlavní napětí:

($\exists$ takový souřadný systém, kde platí: $\sigma_{i \neq j} = 0$)

$$\sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Tenzor napětí. Podmínka plasticity.

Plasticita:

1. podmínka plasticity (yield criteria)
2. zákon zpevnění (hardening rule)
3. zákon tečení (flow rule)

Podmínka plasticity, problém:
Jak porovnat tenzor (napětí) se skalárem (mez kluzu, mez plasticity)?

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ sym & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \lesseqgtr \sigma_Y \qquad (3)$$

Tenzor napětí. Podmínka plasticity.

Obecně lze **podmínku plasticity** zapsat matematicky:

$$f\left(\sigma_{ij}, k\right) = 0$$
$$f\left(\sigma_{ij}, k\right) < 0 \ldots \text{elastický stav}$$
$$f\left(\sigma_{ij}, k\right) = 0 \ldots \text{plastický stav}$$

všimněme si, že $f\left(\sigma_{ij}, k\right) > 0$ není definováno, není přípustné, jedná se o neexistující stav.

Prakticky ji však budeme vyjadřovat pomocí invariantů.

Proč?

Tenzor napětí. Podmínka plasticity.

Podmínka plasticity

je tedy kritérium, za jakých podmínek nastává v daném bodě tělesa (x, y, z) přechod z pružného stavu do plastického stavu. Vztah bude vyjádřen mezi složkami napětí a mezí kluzu.

Důležité bude grafické vyjádření podmínky plasticity. Nejčastěji budeme používat **Haighův-Westergaardův** prostor, či prostor hlavních napětí. Jedná se o trojrozměrný kartézský prostor, jehož souřadnice představují velikost hlavních napětí, která charakterizují napjatost v bodě tělesa. H-W prostor se používá při popisu chování izotropních materiálů a posuzování jejich mezních stavů.

Haighův-Westergaardův prostor

V H-W prostoru jsou definovány dvě významné množiny bodů:

- Hydrostatická osa
- Deviátorová rovina

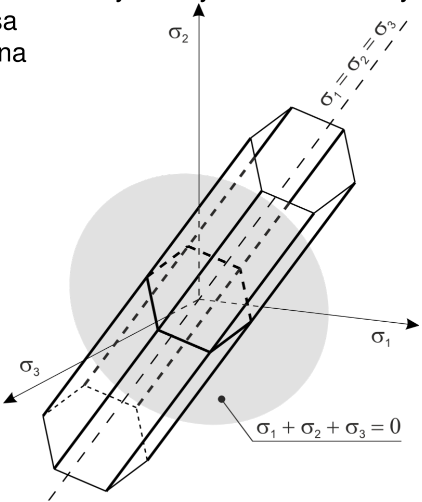


Figure: Tresca v HW prostoru

Haighův-Westergaardův prostor

V H-W prostoru jsou definovány dvě významné množiny bodů:

- Hydrostatická osa je množina bodů definovaná předpisem

  $$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$$

  Hydrostatická osa reprezentuje všestrannou rovnoměrnou tahovou či tlakovou napjatost v bodě tělesa.

- Deviátorová rovina je množina bodů definovaná předpisem

  $$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

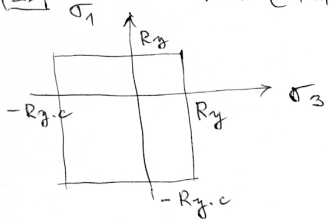
  jež představuje rovinu, která je kolmá na hydrostatickou osu a prochází počátkem souřadnic. Deviátorová rovina se užívá při popisu chování, které nezávisí na všestranném rovnoměrném tahu či tlaku. Například u některých kovových materiálů nemá všestranný rovnoměrný tah či tlak v prvním přiblížení vliv na dosažení mezního stavu pružnosti, tj. na iniciaci trvalé deformace materiálu. Proto při popisu napjatosti, která vede ke vzniku počáteční trvalé deformace, stačí pracovat s kolmým průmětem bodů v H-W prostoru do deviátorové roviny.

PODMÍNKY PLASTICITY – GRAFICKÉ VYJÁDŘENÍ

a) Rankinova p.p. = maximální normál. napětí (σ_{max})

= plastické přetváření nastane tehdy, když jedno z hlavních napětí dosáhne meze plasticity:

$\boxed{2D}$ $\max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) = R_y$ (R_y – výpočtová σ_y



— izotropní materiál $\sigma_1 = R_y$ $|\sigma_3| = R$

— anizotropní materiál

$\sigma_1 = R_y$ $\sigma_1 = -R_y \cdot c$

$\sigma_3 = R_y$ $\sigma_3 = -R_y \cdot c$

b) Trescova p.p. = maximální smykové napětí (τ_{max})

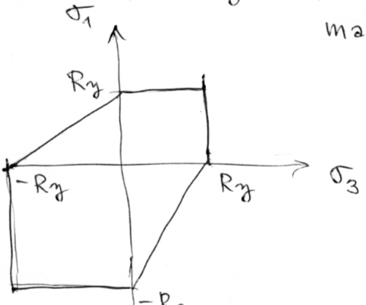
max. smykové napětí: $\tau_{1,2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ $\quad \tau_{13} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

$$\tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

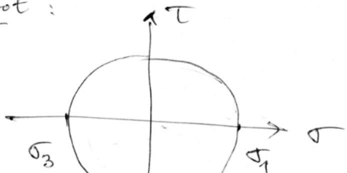
Trescova podmínka: $\max . \left\{ \frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1| \right\} = k$

Konstanta $\underline{\underline{k}}$ je stanovena pomocí prostého tahu na mezi plasticity — je to hodnota smykového napětí při jejím dos

$$\max \tau = \frac{\sigma}{2} = \frac{R_y}{2} = k$$



neboť:



c) Huber-Mises-Hencky (H-M-H) podmínka (energetické)

= plastické přetváření nastane tehdy, když potenciální energie změny tvaru dosáhne kritické hodnoty (mez kluzu)

$$\sigma_{red} = \sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

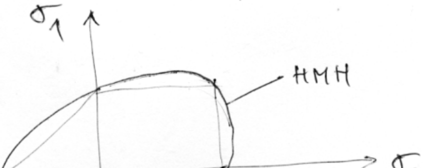
Grafické vyjádření: 2-D (rovinná napjatost v hl. napětích)

2-D : $\sigma_2 = 0$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_3^2+\sigma_3^2-2\sigma_1\sigma_3+\sigma_1^2} = R_y$$

$$\frac{1}{2}\left(2\sigma_1^2+2\sigma_3^2-2\sigma_1\sigma_2\right) = R_y^2$$

$$\boxed{\sigma_1^2+\sigma_1\sigma_2+\sigma_3^2 = R_y^2}$$ – rovnice elipsy



Haighův-Westergaardův prostor

Známe podmínky plasticity

- Rankin (σ_{max})
- Tresca (τ_{max})
- HMH (J2) - odvodíme

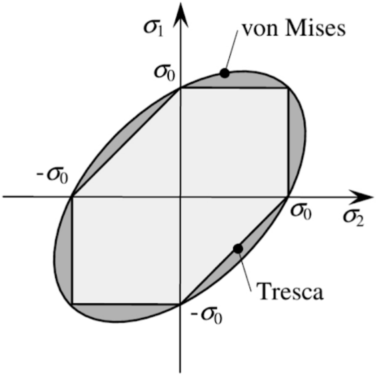


Figure: Tresca vs HMH ve 2D prostoru

Odvození podmínky plasticity dle HMH

$$U = \int \lambda \, dV = \int \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \, dV = \int \frac{1}{2} \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{xy} \gamma_{xy} \right) \, dV$$

$$= \int \frac{1}{2} \left(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 \right) \, dV$$

Využijme Poissonova zákona příčného zkrácení:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left(\sigma_1 - \mu \sigma_2 - \mu \sigma_3 \right)$$

A dosaďme zpět do vztahu pro energii:

$$U = \frac{1}{2} \int \frac{\sigma_1}{E} \left(\sigma_1 - \mu \sigma_2 - \mu \sigma_3 \right) + \frac{\sigma_2}{E} \left(\sigma_2 - \mu \sigma_1 - \mu \sigma_3 \right) + \frac{\sigma_3}{E} \left(\sigma_3 - \mu \sigma_1 - \mu \sigma_2 \right) \, dV =$$

$$= \frac{1}{2E} \int \sigma_1^2 - \mu \sigma_1 \sigma_2 - \mu \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2^2 - \mu \sigma_1 \sigma_2 - \mu \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3^2 - \mu \sigma_1 \sigma_3 - \mu \sigma_2 \sigma_3 \, dV =$$

$$= \frac{1}{2E} \int \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \left(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 \right) \, dV$$

Rozklad napjatosti na volumetrickou a deviatorickou část:

$$\sigma = \sigma_V + \sigma_D = \sigma_m.I + s_{ij}$$

Obdobně musí platit i pro energii (energie je navíc skalár):

$$U = U_V + U_D$$

Pro def. energii volumetrické části získáme:

$$\begin{aligned} U_V &= \frac{1}{2E}\int \sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2 - 2\mu\left(\sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2\right)\,dV = \\ &= \frac{1}{2E}\int 3\sigma_m^2 - 2\mu 3\sigma_m^2\,dV = \frac{1}{2E}\int 3\sigma_m^2(1-2\mu)\,dV = \\ &= \frac{3(1-2\mu)}{2E}\int \sigma_m^2\,dV = \frac{3(1-2\mu)}{2E}\int \frac{\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right)}{3^2}\,dV = \\ &= \frac{1-2\mu}{6E}\int \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right)\,dV \end{aligned}$$

Pro HMH podmínku potřebuji deviatorickou část - U_D - tedy tu část energie, zodpovědnou za **změnu tvaru**:

$$U_D = U - U_V = \frac{1}{2E}\int \sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3\right)\, dV -$$
$$-\frac{1-2\mu}{6E}\int \sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2 + 2\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3\right)\, dV =$$
$$=\int \frac{1+\mu}{3E}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right) - \left(\frac{2\mu}{2E}+\frac{1-2\mu}{3E}\right)\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3\right)\, dV =$$
$$=\frac{1+\mu}{3E}\int \sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2 - \left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3\right)\, dV$$

Nyní v posledním řádku výraz: $\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)$ označíme jako σ_{VM}^2. Budeme tedy psát:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3)} =$$
$$= \sqrt{\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2}{2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2}$$

Kritérium HMH (podmínku plasticity HMH) lze tedy zapsat:

$$U_D^{VM} \leq U_D^{1D}$$

Porovnejme výrazy pro energie (integrály). Pro jednoosou napjatost platí výraz vpravo:

Proč?

Odvoďte výraz pro deformační energii pro 1D napjatost U_D

$$\frac{1+\mu}{3E} \int \sigma_{VM}^2 \, dV \leq \frac{1+\mu}{3E} \int \sigma_y^2 \, dV$$

Mají-li být integrály rovny, musí být rovny integrandy (stejná integrační oblast dV):

$$\frac{1+\mu}{3E} \sigma_{VM}^2 \leq \frac{1+\mu}{3E} \sigma_y^2$$

$$\sigma_{VM} \leq \sigma_y$$

Pozn. ve 2D ($\sigma_3 = 0$):

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 0 - (\sigma_1\sigma_2 + 0 + 0)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - (\sigma_1\sigma_2 + 0 + 0)} =$$
$$= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$$

totožný výraz s:

$$\sigma_{VM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - 0)^2 + (\sigma_1 - 0)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

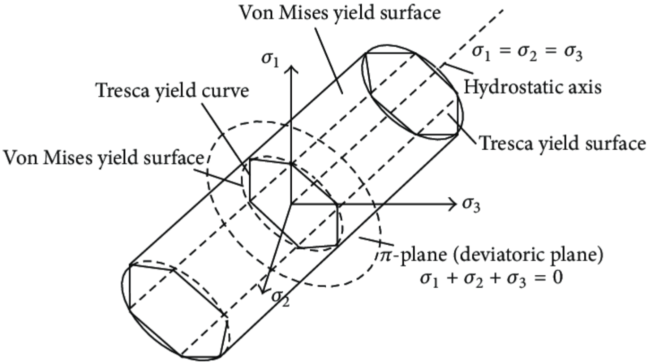
(rovnice elipsy).
Pozn. pro 1D ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$):

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + 0 + 0 + 2\,(0 + 0 + 0)} = \sqrt{\sigma_1^2} = \sigma_1$$

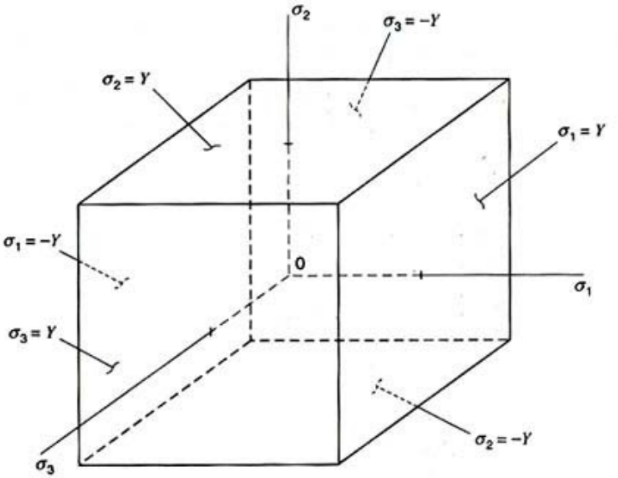
stejně vychází:

$$\sigma_{VM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1 - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (\sigma_1 - 0)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2\sigma_1^2} = \sqrt{\sigma_1^2} = \sigma_1$$

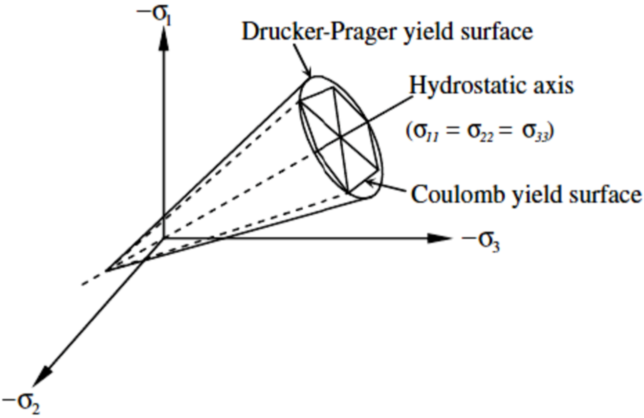
podmínka HMH a Tresca v HW prostoru



Rankine v HW prostoru



Další podmínky plasticity: Drucker-Prager, Mohr-Coulomb



Příklad - zadání na konci hodiny v 16:30

Dána napjatost v bodě prostřednictvím tenzoru napětí ve složkách.
Dána mez kluzu materiálu. Určete koeficient bezpečnosti dle kritérií: Rankin, Mohr-Coulomb, Tresca, HMH. Výpočet. Grafická úprava. Dosazování. Jednotky.