Teoretická a aplikovaná mechanika
Přednáška 3
Invarianty tenzoru napětí. Deviátor tenzoru napětí.

Ondřej Jiroušek

Ústav mechaniky a materiálů
Fakulta dopravní ČVUT

Tenzor napětí. Hlavní napětí.

- tenzor napětí (v materiálovém bodě x, y, z:)

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ sym & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{1}$$

- hlavní napětí:

($\exists$ takový souřadný systém, kde platí: $\sigma_{i \neq j} = 0$)

$$\sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Hlavní napětí ve 3D: pro stanovení hlavních napětí lze vyřešit kubickou charakteristickou rovnici. Rovnice je výsledkem řešení rovnice $det(\sigma_{ij} - \lambda) = 0$, t.j. determinantu rovného nule. Vypočtené hodnoty λ se rovnají hlavním napětí.

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Toto lze rozšířit

$$\begin{array}{rcl} (\sigma_{11} - \lambda)\left[(\sigma_{22} - \lambda)(\sigma_{33} - \lambda) - \sigma_{23}^2\right] & - & \\ \sigma_{12}\left[\sigma_{12}(\sigma_{33} - \lambda) - \sigma_{23}\sigma_{13}\right] & + & \\ \sigma_{13}\left[\sigma_{12}\sigma_{23} - (\sigma_{22} - \lambda)\sigma_{13}\right] & = & 0 \end{array} \tag{3}$$

a vyřešit:

$$\lambda^3 - (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\lambda^2 + (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2)\lambda - (\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}) = 0$$

= hledání kořenů charakteristické rovnice

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

.

kde hodnoty v závorkách jsme označili jako I_1, I_2, I_3 – invarianty tenzoru napětí:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$
$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2$$
$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}$$

Slovy: I_1 je součet diagonálních prvků, I_2 je součet hlavních minorů a I_3 je determinant matice σ_{ij}:

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \\ I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \\ I_3 &= \det(\boldsymbol{\sigma}) \end{aligned}$$

Vraťme se ještě k charakteristické rovnici

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

Vidíme tedy, že hodnoty λ jsou hlavní napětí a tvar char. rovnice je:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

- invarianty tenzoru napětí lze vyjádřit jak ve složkách, tak v hlavních napětích:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} &&= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
I_2 &= \left| \quad \right| + \left| \quad \right| + \left| \quad \right| &&= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 \\
I_3 &= \left| \quad \right| &&= \sigma_1\sigma_2\sigma_3
\end{aligned}
\tag{4}
$$

- Deviátor tenzoru napětí, invarianty deviátoru tenzoru napětí
  - budou důležité v podmínce plasticity, např. $f(J_2) = 0$ - nesmí záležet na volbě souřadného systému

Rozložení tenzoru napětí na deviatorickou a volumetrickou složku:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + p_{ij} = s_{ij} + \sigma_m \delta_{ij} \tag{5}$$

σ_m – (m=mean); kulový tenzor napětí p_{ij}

$$p_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} = \sigma_m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \tag{6}$$

kde σ_m je střední napětí (průměrné normálové napětí):

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) = \frac{I_1}{3} \tag{7}$$

s_{ij} – deviátor tenzoru napětí:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix} \tag{8}$$

- invarianty deviátoru tenzoru napětí:

$$J_1 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{s_{ij}}) = s_{11} + s_{22} + s_{33} \tag{9}$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & s_{13} \\ s_{13} & s_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{22} & s_{23} \\ s_{23} & s_{33} \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$J_3 = \det(\boldsymbol{s_{ij}}) \tag{11}$$

$$\begin{aligned} J_1 &= s_1 + s_2 + s_3 = 0 \\ J_2 &= \tfrac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \tfrac{2}{3} \overbrace{\left(\sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2\right)}^{\text{pouze } \tau_{ij} \text{(smyk)}} = \tfrac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \\ J_3 &= \left|s_{ij}\right| = s_1 s_2 s_3 = \tfrac{1}{27} \underbrace{(\sigma_{13} + \sigma_{12})(\sigma_{21} + \sigma_{23})(\sigma_{31} + \sigma_{32})}_{\text{pouze } \tau_{ij} \text{(smyk)}} \end{aligned} \tag{12}$$

Obdobně lze rozložit i tenzor deformace na volumetrickou a deviatorickou část.
Tenzor deformace:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon_m \delta_{ij} \tag{14}$$

střední deformace (m=mean); kulová tenzor deformace:

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m \delta_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} \tag{15}$$

deviátor tenzoru deformace:

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_m \delta_{ij} \tag{16}$$

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_m & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_m & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - \varepsilon_m \end{bmatrix}$$

Hustota potenciální energie

Hustota potenciální energie $[J/m^3]$:

$$\lambda = \frac{1}{2}\sigma^T\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(s_{ij} + \sigma_m\delta_{ij}\right)\left(e_{ij} + \varepsilon_m\delta_{ij}\right) = \frac{1}{2}s_{ij}e_{ij} + \frac{3}{2}\sigma_m\varepsilon_m \tag{18}$$

$$U = \int \lambda \, dV = \int \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \, dV = \int \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right) dV$$
$$= \int \frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right) dV$$

Opět lze rozložit na volumetrickou a deviatorickou část (bude později výhodné pro odvození von Misesovy podmínky plasticity. Pro střední hodnoty napětí a deformace (volumetrickou část):

$$\frac{1}{2}\sigma_m\varepsilon_m = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} \tag{19}$$

Příklad 01

Hydrostatická a deviatorická napjatost. Jedná se o podmnožiny jakéhokoli daného tenzoru napětí, jakoukoliv napjatost lze rozložit na hydorstatickou (pouze změna objemu) a deviatorickou (změna tvaru). Když se tyto napjatosti sečtou, získáme zpět původní tenzor napětí. Pamatujme: **Hydrostatické napětí souvisí se změnou objemu, zatímco deviátorové napětí souvisí se změnou tvaru.**

Hydrostatický stres je prostě průměr tří normálních složek napětí jakéhokoli tenzoru napětí:

$$\sigma_{\text{Hyd}} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$$

Toto lze zapsat i jinak:

$$\sigma_{\text{Hyd}} \;=\; \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \;=\; \frac{1}{3}I_1 \;=\; \frac{1}{3}\sigma_{kk}$$

hydrostatické napětí je sice skalární hodnota, lépe jej však zapisovat jako tenzor:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{Hyd}} = \begin{bmatrix} \sigma_{\text{Hyd}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\text{Hyd}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\text{Hyd}} \end{bmatrix}$$

A nyní zpět k příkladu. Pro danou napjatost:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 50 & 30 & 20 \\ 30 & -20 & -10 \\ 20 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

Hydrostatické napětí, tedy střední napětí σ_m je:

$$\sigma_{\mathrm{m}} = \frac{50 + (-20) + 10}{3} = 13.3\mathrm{MPa}$$

Lépe zapsané jako tenzor:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{m}} = \begin{bmatrix} 13.3 & 0 & 0 \\ 0 & 13.3 & 0 \\ 0 & 0 & 13.3 \end{bmatrix}$$

Příklad 02

Další příklady jednoduchých napjatostí. Jednoosý tah:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Čistý smyk:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hydrostatická napjatost:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Příklad 03

Normálová napětí ve 3 kolmých směrech v daném bodě jsou: $\sigma_x = 60$MPa, $\sigma_y = -20$MPa, $\sigma_z = 40$MPa. Příslušné smykové napětí je $\tau_{xy} = 30$MPa. Ostatní smyková napětí jsou rovna 0.
Stanovte invarianty tenzoru napětí a invarianty deviátoru tenzoru napětí a maximální smykové napětí τ_{max}.

Řešení:
Tenzor napětí ve složkách má dle zadání tvar:

$$\begin{vmatrix} 60 & 30 & 0 \\ 30 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{vmatrix}$$

Charakteristická rovnice:

$$\begin{vmatrix} 60-\sigma & 30 & 0 \\ 30 & -20-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 40-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$(60 - \sigma)\,(-20 - \sigma)\,(40 - \sigma) - (40 - \sigma)\;30\,30 = 0$$
$$(40 - \sigma)\left[(60 - \sigma)\,(-20 - \sigma) - 30^2\right] = 0$$

Z první závorky (součin dvou činitelů je roven nule):

$$\sigma_1 = 40\ \mathrm{MPa}$$

Z druhé závorky plyne:

$$-120 - 40\,\sigma + \sigma^2 - 900 = 0$$
$$\sigma_{2,3} = 20 \pm \sqrt{400 + 2100} = 20 \pm 50$$
$$= \begin{cases} 70 & -30 \end{cases}$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 = 70 > 40 > -30\ \mathrm{MPa}$$

Maximální hodnota smykového napětí (viz. Mohrova kružnice):

$$\tau_{max} = \pm\frac{1}{2}\,(\sigma_1 - \sigma_3) = \pm\frac{1}{2}\,(70 - (-30)) = \pm 50\ \mathrm{MPa}$$

Invarianty tenzoru napětí:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 70 + 40 - 30 = 60 - 20 + 40 = 80\,\mathrm{MPa}$$

$$I_2 = \left|\quad\right| + \left|\quad\right| + \left|\quad\right| = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 = 70.40 + 40.(-30) + 70.(-30) =$$
$$= 280 - 120 - 210 = -500\,\mathrm{MPa}^2$$

$$I_3 = \left|\quad\right| = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 70.40.(-30) = -84000\,\mathrm{MPa}^3$$

Rozložení napjatosti na napjatost způsobující pouze změnu objemu (volumetrickou) a pouze změnu tvaru (deviatorickou) v x, y, z:

$$\begin{vmatrix} 60 & 30 & 0 \\ 30 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{vmatrix}$$

v hlavních souřadnicích (tenzor hl. napětí):

$$\begin{vmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & \text{-}30 \end{vmatrix}$$

Rozložení tenzoru na volumetrickou část:

$$\sigma_{ij}{=}\sigma_m.I + s_{ij}$$

Střední napětí σ_m:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = \frac{80}{3}\,\mathrm{MPa}$$

Deviatorické napětí s_{ij}:

$$s_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 70 - \frac{80}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 40 - \frac{80}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -30 - \frac{80}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{130}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{40}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{170}{3} \end{vmatrix}$$

Invarianty deviátoru tenzoru napětí:

$$J_1 = s_{11} + s_{22} + s_{33} = \frac{130}{3} + \frac{40}{3} - \frac{170}{3} = 0\,\text{MPa}$$

$$J_2 = s_{22}s_{33} + s_{11}s_{33} + s_{11}s_{22} = \frac{40}{3}\frac{170}{3} + \frac{130}{3}\frac{170}{3} + \frac{130}{3}\frac{40}{3} = \ldots\,\text{MPa}^2$$

$$J_3 = s_{11}s_{22}s_{33} = \frac{130}{3}\frac{40}{3}\frac{170}{3} = \ldots\,\text{MPa}^3$$