PLASTICITA = podmínka plasticity (yield criteria)
zákon zpevnění (hardening rule)
zákon tečení (flow rule)

(1) Podmínky plasticity:

problém: v materiálovém bodě (x, y, z) :

$$\begin{array}{c} \text{tenzor} \\ \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \text{sym} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ & & \sigma_z \end{bmatrix} \end{array}$$

mechan. zkouška (1osá napj.)

: $\boxed{\sigma_y}$ skalár

Jak porovnat tenzor (napětí) se skalárem (mez kluzu)

Obecně: $f(\sigma_{ij}, k) = 0$

$f(\sigma_{ij}, k) < 0$ elastický stav
$f(\sigma_{ij}, k) = 0$ plastický stav
$(> 0$ nepřípustné$)$

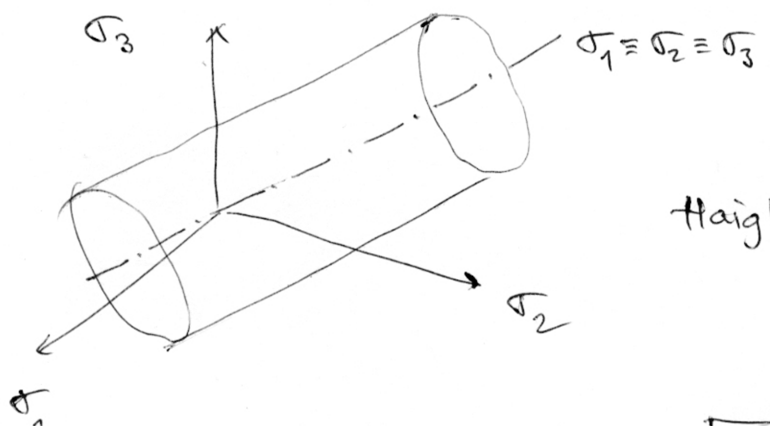
Prakticky: $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, k) = 0$
$f(I_1, J_2, J_3) = 0$

PODMÍNKA PLASTICITY je tedy kritérium, za jakých podmínek nastává v daném bodě tělesa (x, y, z) přechod z pružného stavu do plastického stavu. (Vztah mezi složkami napětí a mezí kluzu)

Př. von Misesova podmínka plasticity:

$$\sigma_y = \sqrt{3 J_2}$$

$$2\sigma_y = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$



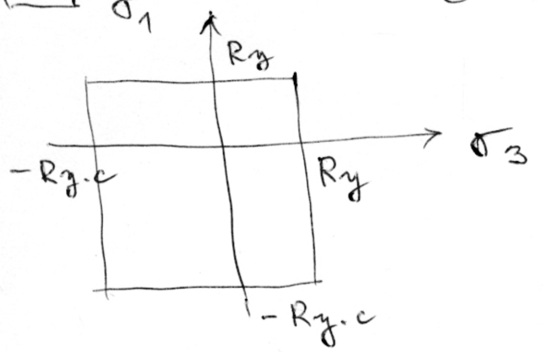
Haigh-Westergardův prostor hl. napětí
$(x_* \equiv \sigma_1 ;\ y_* \equiv \sigma_2 ;\ z \equiv \sigma_3)$

PODMÍNKY PLASTICITY – GRAFICKÉ VYJÁDŘENÍ

a) Rankinova p.p. = maximální normál. napětí (σ_{max})

= plastické přetváření nastane tehdy, když jedno z hlavních napětí dosáhne meze plasticity:

$\boxed{2D}$ $\max\left(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\right) = R_y$ (R_y – výpočtová σ_y)



— izotropní materiál $\sigma_1 = R_y$ $|\sigma_3| = R_y$

— anizotropní materiál

$\sigma_1 = R_y$ $\sigma_1 = -R_y.c$

$\sigma_3 = R_y$ $\sigma_3 = -R_y.c$

b) Trescova p.p. = maximální smykové napětí (τ_{max})

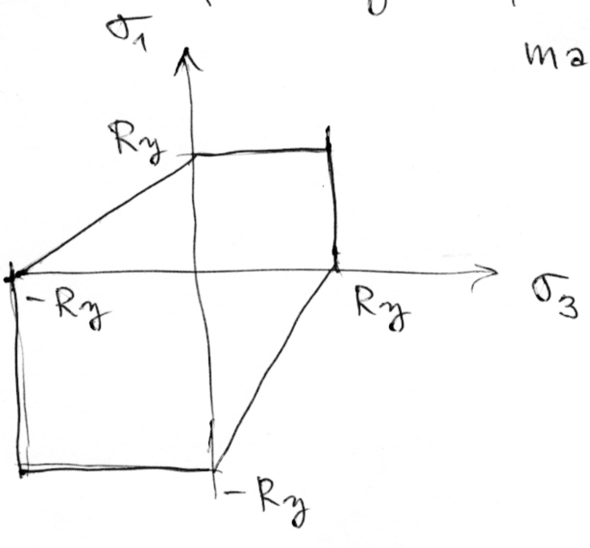
max. smykové napětí: $\tau_{1,2} = \pm \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ $\tau_{13} = \pm \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

$\tau_{23} = \pm \dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$

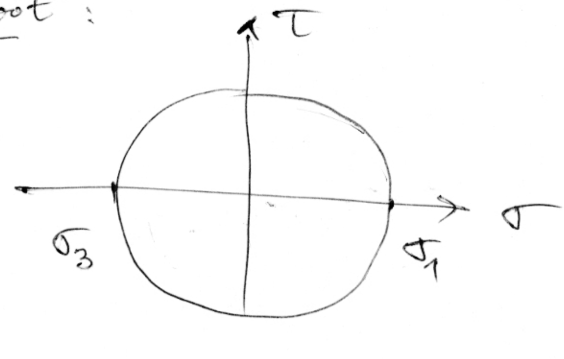
Trescova podmínka: $\max.\left\{\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|\right\} = k$

Konstanta $\underline{\underline{k}}$ je stanovena pomocí prostého tahu na mezi plasticity – je to hodnota smykového napětí při jejím dosaž.

$\max \tau = \dfrac{\sigma}{2} = \dfrac{R_y}{2} = k$



nebot:



c) Huber-Mises-Hencky (H-M-H) podmínka (energetické)

= plastické přetváření nastane tehdy, když potenciální energie změny tvaru dosáhne kritické hodnoty (mez kluzu)

$$\sigma_{red} = \sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

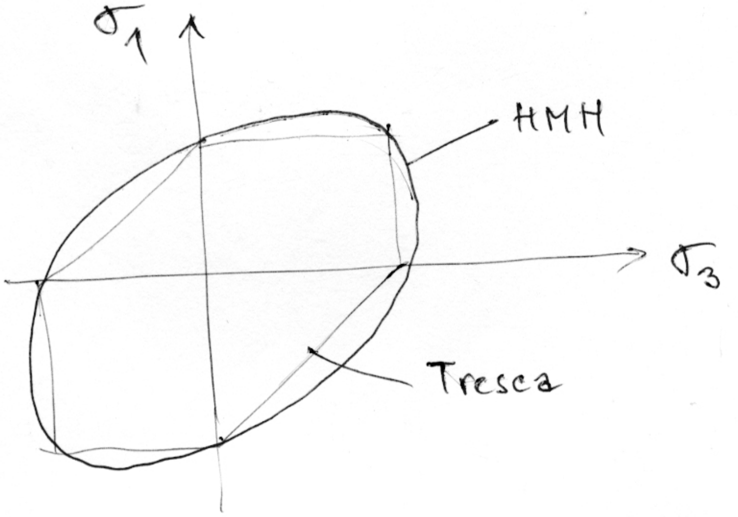
Grafické vyjádření: 2-D (rovinná napjatost v hl. napětích)

2-D : $\sigma_2 = 0$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_3^2+\sigma_3^2-2\sigma_1\sigma_3+\sigma_1^2} = R_y$$

$$\frac{1}{2}\left(2\sigma_1^2+2\sigma_3^2-2\sigma_1\sigma_2\right) = R_y^2$$

$$\boxed{\sigma_1^2+\sigma_1\sigma_2+\sigma_3^2 = R_y^2}$$ – rovnice elipsy

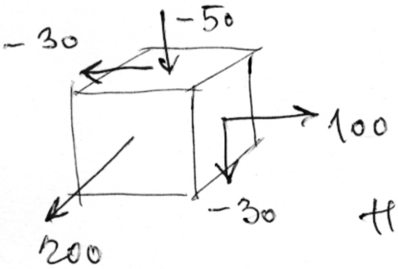


Tresca i HMH jsou podmínky plasticity využitelné pro kovy.

Př. Napěťová analýza prutu letadla dává v bodě napjatost:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & -30 \\ 0 & -30 & -50 \end{bmatrix} \text{MPa.}$$

Část je vyrobena ze slitiny s mezí kluzu $\sigma_y = 500\,\text{MPa}$ (R_y). Jaký je koeficient bezpečnosti pro jednotlivá kritéria?



Hlavní napětí: $\sigma_{1,2,3} = ?$

$\underline{\underline{\sigma_1 = 200\,\text{MPa}}}$

$$\sigma_{2,3} = \frac{100-50}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100+50}{2}\right)^2 + 30^2} =$$

$$\underline{\underline{\sigma_2 = 105.78\,\text{MPa}}}$$

$$\underline{\underline{\sigma_3 = -55.78\,\text{MPa}}}$$

a) Rankin: $\sigma_{max} = \max\{|\sigma_1| |\sigma_2| |\sigma_3|\} = \underline{200\,\text{MPa}}$

$FS = 500/200 = \underline{\underline{2.5}}$

b) Tresca: $\tau_{max} = \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right| = \frac{255.78}{2} = \underline{127.89\,\text{MPa}}$

→ $\frac{\sigma_y}{2} = \frac{500}{\cancel{25}}$! $= 250$! $FS = 250/127.89 = \underline{\underline{1.95}}$

c) von Mises: $\sigma_{VM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2} =$

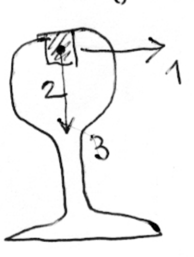
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(200-105)^2 + (105+56)^2 + (-56-200)^2} =$$

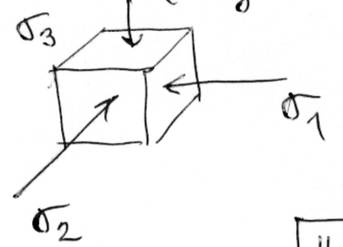
$$= \underline{224\,\text{MPa}}$$

$FS = 500/224 = \underline{\underline{2.2}}$

DCV: Proč jsou všechny výsledky dle různých kritérií tak blízké? (podobné?)

Př. Kolejnice E230 $(R_y = 400\,\text{MPa})$





$\sigma_1 = -800\,\text{MPa}$

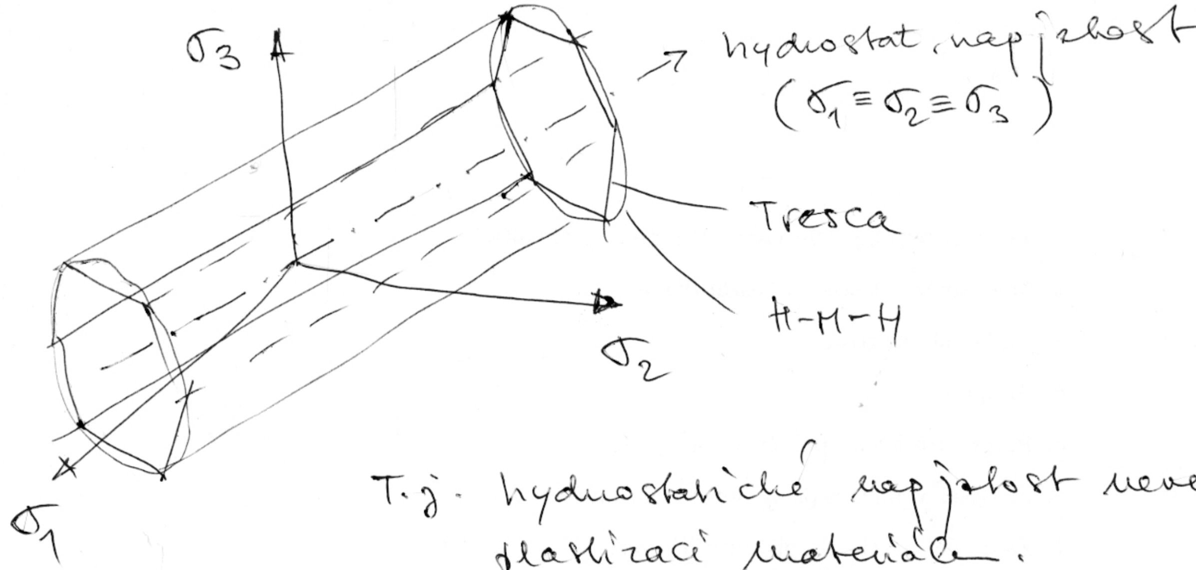
$\sigma_2 = -900\,\text{MPa}$

$\sigma_3 = -1100\,\text{MPa}$

HOUŽEVNATÝ MAT: < Tresca / H-M-H

SHRNUTÍ – PODMÍNKY PLASTICITY

Graficky: Haigh-Westergaardův prostor:

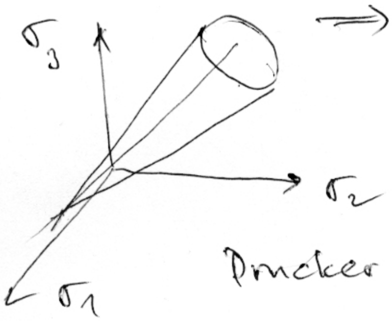


T.j. hydrostatické napjatost nevede k plastizaci materiálu.

→ pro zeminy, ... NEPLATÍ

⇒ podmínky s uzavřenou plochou plasticity

Dále:



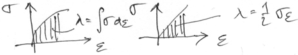
Drucker-Prager (kužel)

Matsuoka-Nakai
Bresler-Pister
Willam-Warnke

Odvození von Mises kritéria

deformační energie $U = \int \lambda \, dV$ $\quad \lambda \ldots$ hustota def. energie $[\mathrm{J/m^3}]$

hustota def. en. $\quad \lambda = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon \quad$ (lin. el. mat.)



$$U = \int_{(V)} \lambda \, dV = \int \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right) dV$$

$$= \int \frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right) dV \qquad \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \text{sym.} & & \sigma_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ & \sigma_2 & 0 \\ & & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

rozšíř. Hook. zákon: $\quad \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_3\right)$

$$U = \frac{1}{2}\int \frac{\sigma_1}{E}\left(\sigma_1 - \mu\sigma_2 - \mu\sigma_3\right) + \frac{\sigma_2}{E}\left(\sigma_2 - \mu\sigma_1 - \mu\sigma_3\right) + \frac{\sigma_3}{E}\left(\sigma_3 - \mu\sigma_1 - \mu\sigma_2\right) dV$$

$$= \frac{1}{2E}\int \sigma_1^2 - \mu\sigma_1\sigma_2 - \mu\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2^2 - \mu\sigma_1\sigma_2 - \mu\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 - \mu\sigma_1\sigma_3 - \mu\sigma_2\sigma_3 \, dV =$$

$$= \frac{1}{2E}\int \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_2 - 2\mu\sigma_1\sigma_3 - 2\mu\sigma_2\sigma_3 \, dV =$$

$$= \frac{1}{2E}\int \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\right) dV$$

rozklad $\quad \sigma = \sigma_V + \sigma_D = \sigma_m \cdot I + s_{ij} \qquad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$

dtto $\quad U = U_V + U_D$

$$U_V = \frac{1}{2E}\int \sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2 - 2\mu\left(\sigma_m^2 + \sigma_m^2 + \sigma_m^2\right) dV =$$

$$= \frac{1}{2E}\int 3\sigma_m^2 - 2\mu\, 3\sigma_m^2 \, dV = \frac{1}{2E}\int 3\sigma_m^2\left(1 - 2\mu\right) dV =$$

$$= \frac{3(1-2\mu)}{2E}\int \sigma_m^2 \, dV = \frac{3(1-2\mu)}{2E}\int \frac{\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2}{3^2} dV =$$

$$= \frac{1-2\mu}{6E} \int \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\left(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\right) dV$$

Pro H-M-H podmínku potřebuji U_D – def. energii odpovídající změně tvaru.

$$U_D = U - U_V = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\right)\right) -$$

$$- \frac{1-2\mu}{6E} \int \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\left(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\right) dV =$$

$$= \int \frac{1+\mu}{3E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \left(\frac{2\mu}{2E} + \frac{1-2\mu}{3E}\right)\left(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\right) dV =$$

$$= \frac{1+\mu}{3E} \int \underbrace{\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\left(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\right)\right)}_{\text{označím } \sigma_{VM}^2} dV$$

$$U_D = \frac{1+\mu}{3E} \int \sigma_{VM}^2 \, dV$$

$$\sigma_{VM}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\left(\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\right)$$

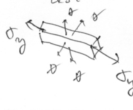
$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2}$$

Kritérium lze pak zapsat: $\frac{1+\mu}{3E}\sigma_{VM}^2 \leq \frac{1+\mu}{3E}\sigma_Y^2$

$$\boxed{\sigma_{VM} \leq \sigma_Y}$$

uniaxial test



2D: $\sigma_3 = 0$

$$\sigma_{VM} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2}$$

$$= \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}$$

elipsa...