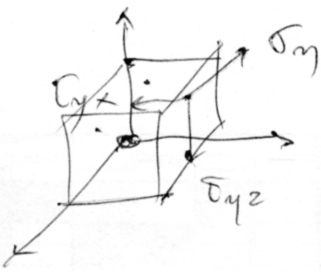
Martin Krejsa, Lenka Lausová, V. Michal
PRUŽNOST A PLASTICITA – VŠB & ZČU

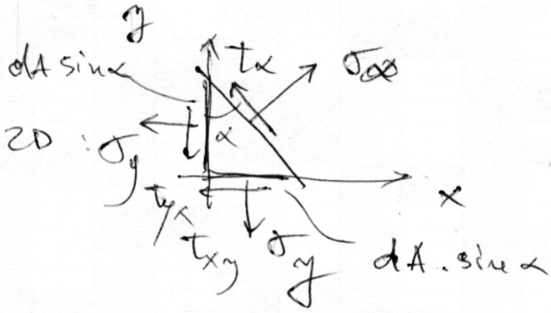
HLAVNÍ NAPĚTÍ

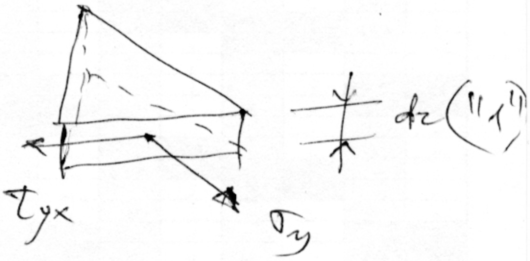
Plastické přetvoření? – Hlavní napětí?



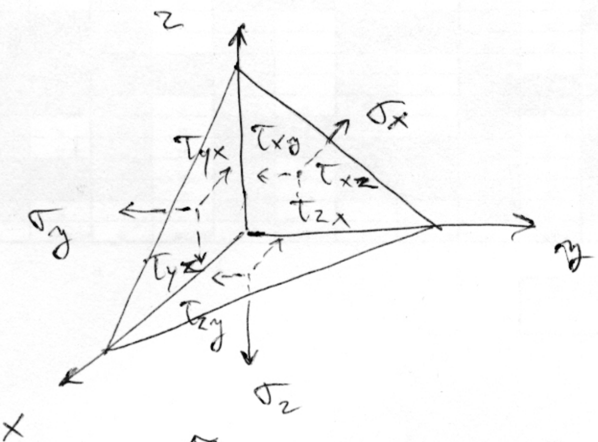
$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \text{sym.} & & \sigma_z \end{bmatrix}$$ tenzor napětí

podobně ve 2D:

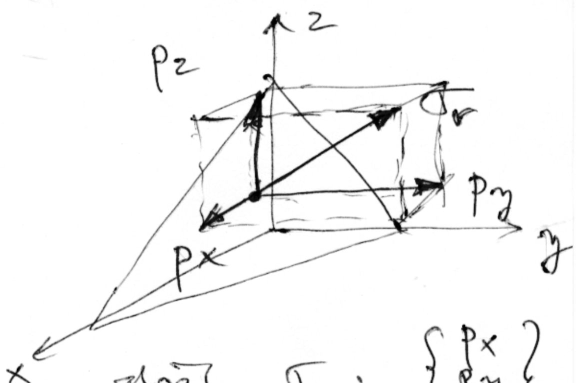




To samé ve 3D:



Hledáme rovinu, na které smyková napětí vymizí ($\tau_{ij} = 0$) a normálová nabydou maximálních hodnot ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) ... Hl. napětí



Plochy ⊥ jsou: dA cos α (YZ)
dA cos β (XZ)
dA cos γ (XY)

složky σ_r: $\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix}$

Rovnováha sil na čtyřstěnu:

$\swarrow x: \; p_x dA - \sigma_x dA \cos\alpha - \tau_{zx} dA \cos\gamma - \tau_{yx} dA \cos\beta = 0$

$\rightarrow y: \; p_y dA - \tau_{xy} dA \cos\alpha - \sigma_y dA \cos\beta - \tau_{xz} dA \cos\gamma = 0$

$\uparrow z: \; p_z dA - \tau_{xz} dA \cos\alpha - \tau_{yz} dA \cos\beta - \sigma_z dA \cos\gamma = 0$

momentové: pouze $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ✓

$$p_x = \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma$$
$$p_y = \tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \tau_{zy}\cos\gamma$$
$$p_z = \tau_{xz}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma$$
$$\sigma_r^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

LZE ŘEŠIT: ...

MATEMATICKY = σ_{ij} - TENZOR

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

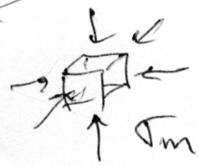
každý stav lze rozložit na 2 napjatosti:

– hydrostatický stav napjatosti:

(změna objemu)
$$\boxed{\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}$$
m – mean

hydrostat. napj.:

$$\begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$$

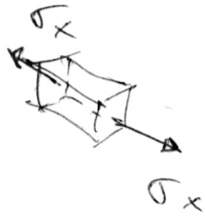


– deviatorický stav napjatosti:

$$\boxed{s_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}}$$

jednoosá napj.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Hlavní napětí – systém souřadnic tak, aby smykové napětí bylo rovno nule.

charakteristická rovnice:
$$\boxed{\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0}$$

I_1, I_2, I_3 – invarianty tenzoru napětí. (nezávislé na s.s.)

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$
$$I_2 = \sigma_y\sigma_z - \tau_{yz}^2 + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xz}^2 + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2$$
$$= \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$$
$$I_3 = \det(\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ & & \tau_{yz} \end{vmatrix}$$

hlavní minor = det submatic (i,j) (k,k)

$$\begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{matrix} \quad (2)$$

3-2

Kořeny charakteristické rovnice $\sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3 = 0$ jsou hlavní napětí: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Invarianty I_1, I_2, I_3 lze rovněž zapsat pomocí hl. napětí:

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned}}$$

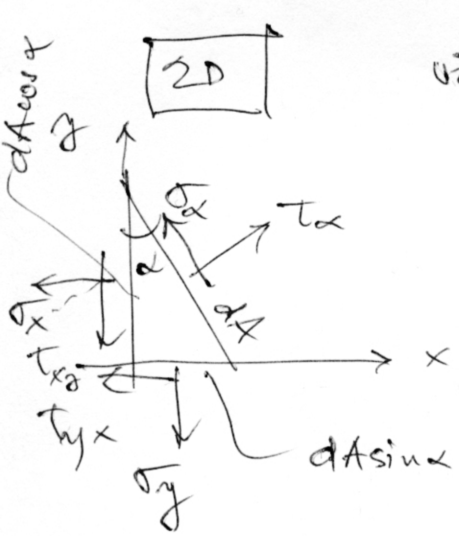
Transformaci složek tenzoru napětí lze zapsat maticově

$$[\sigma]' = [L][\sigma][L]^T$$

kde $[L]$ & $[L]^T$ jsou matice pootočení (a matice transpon.)

Viz PP: Hlavní napětí $\sigma_{1,2} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$\boxed{2D}$ viz $\sigma_1 > \sigma_2$ $\quad tg\,\alpha = \dfrac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$ $\quad \tau_{max} = \pm \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ (Mohr. O)



$\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ✓

$\sigma = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T \qquad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$

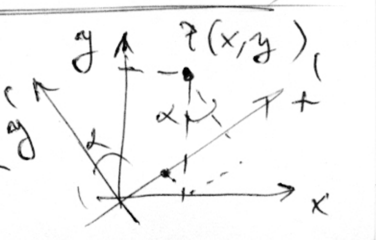
$\nearrow\ \tau_\alpha \cdot \cancel{dA} = \sigma_x \cancel{dA} \cdot \cos^2\alpha + 2\tau_{xy} \cancel{dA} \sin\alpha\cos\alpha + \sigma_y \cancel{dA} \sin^2\alpha$

$\nwarrow\ \sigma_\alpha\, dA = \dots$

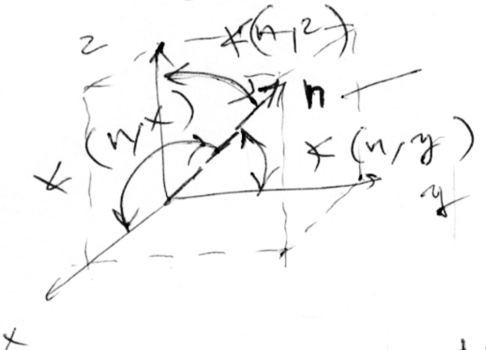
Extrém? $\dfrac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0 \longrightarrow \sigma_{1,2} = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

$\sigma' = L\sigma L^T$ kde $L = \begin{bmatrix} \cos\alpha & +\sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$\boxed{3-3}$ transformační matice



matice [L] ve 3D ?



normála: $n_x = \cos(n,x)$

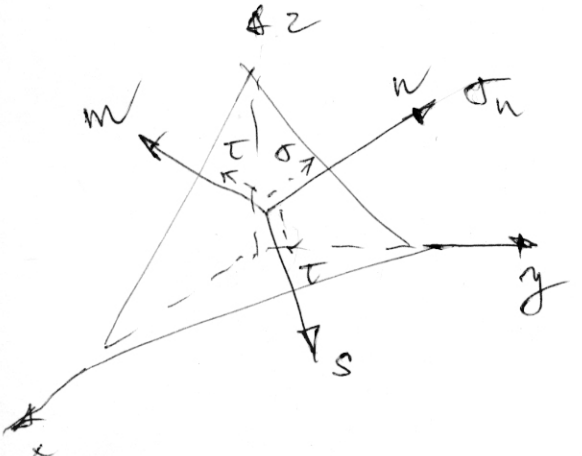
$n_y = \cos(n,y)$

$n_z = \cos(n,z)$

$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$

součet směr. cosinů

$dA_x = dA\, n_x \quad dA_y = dA\, n_y \quad dA_z = dA\, n_z$



$$\sigma_n = p_{nx} n_x + p_{ny} n_y + p_{nz} n_z$$

$m_x = \cos(m,x)$ $\quad s_x = \cos(s,x)$

$m_y = \cos(m,y)$ $\quad s_y = \cos(s,y)$

$m_z = \cos(m,z)$ $\quad s_z = \cos(s,z)$

$$\sigma = L \sigma L^T = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \\ m_x & m_y & m_z \\ s_x & s_y & s_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ & & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & m_x & n_z \\ n_y & m_y & s_y \\ n_z & m_z & s_z \end{bmatrix}$$

Pro teorie porušení bude potřebné znát i invarianty deviátoru napětí. Deviátor tenzoru napětí:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ & & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix}, \quad \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$J_1 = S_{11} + S_{22} + S_{33}$$

$$J_2 = S_{11} S_{22} + S_{11} S_{33} + S_{22} S_{33} - S_{12}^2 + S_{13}^2 + S_{23}^2$$

$$J_3 = \det(s_{ij}) = |s_{ij}| = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ & S_{22} & S_{23} \\ & & S_{33} \end{vmatrix}$$

Proč: Pro teorie porušení, kdy významný je smyk, bude hrát roli zejména J_2 (smyk). Např. $\sqrt{J_2}$

UKÁŽEME POZDĚJI

$\sigma_{eff} = \sqrt{3 J_2}$

Př. Normálová napětí ve 3 kolmých směrech v daném bodě jsou: $\sigma_x = 60\,MPa$, $\sigma_y = -20\,MPa$, $\sigma_z = 40\,MPa$. Příslušné tečné (smyk.) napětí je $\tau_{xy} = 30\,MPa$. $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Urči I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, J_3 a τ_{max}.

Napjatost:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 0 \\ 30 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

Char. rovnice:

$$\begin{vmatrix} 60-\sigma & 30 & 0 \\ 30 & -20-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 40-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$(60-\sigma)(-20-\sigma)(40-\sigma) - (40-\sigma).30.30 = 0$$

$$(40-\sigma)\left[(60-\sigma)(-20-\sigma) - 30^2\right] = 0$$

$$\underline{\sigma_1 = 40}$$

$$-120 - 40\sigma + \sigma^2 - 900 = 0$$

$$\sigma_{2,3} = 20 \pm \sqrt{400 + 2100} = 20 \pm 50 = \left\langle \begin{matrix} 70 \\ -30 \end{matrix} \right.$$

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \;=\; \underline{\underline{70 > 40 > -30\ MPa}}$$

$$\tau_{max} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \pm \frac{1}{2}(70 - (-30)) = \underline{\underline{\pm 50\ MPa}}$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 70 + 40 - 30 = 60 - 20 + 40 = \underline{\underline{80\ MPa}}$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 = 70.40 + 40.(-30) + 70.(-30) = 280 - 120 - 210$$

$$= \underline{\underline{-500\ MPa}}$$

$$= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = \ldots = \underline{\underline{-500\ MPa}}$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 70.40.(-30) = \underline{\underline{-84\,000\ MPa}}$$

$$= \begin{vmatrix} 60 & 30 & 0 \\ 30 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = \ldots = \underline{\underline{-84\,000\ MPa}}$$

tenzor napětí v (xyz):

$$\begin{bmatrix} 60 & 30 & 0 \\ 30 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

v hl. souřadnicích (hl. tenzor)

$$\begin{bmatrix} 70 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}$$

Rozložení napjatosti na napjatost ~ < změny objemu / změny tvaru

$$\sigma_m = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{80}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{80}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{80}{3} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{80}{30}$$

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 70 - \frac{80}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 40 - \frac{80}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -30 - \frac{80}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{130}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{40}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{170}{3} \end{bmatrix}$$

$$J_1 = S_{11} + S_{22} + S_{33} = \frac{130}{3} + \frac{40}{3} + \left(-\frac{170}{3}\right) = \underline{\underline{0}}$$

VŽDY NULOVÝ !

$$J_2 = S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{11}S_{33} = \frac{130}{3}\left(-\frac{170}{3}\right) + \frac{40}{3}\left(-\frac{170}{3}\right) + \frac{130}{3}\left(-\frac{170}{3}\right)$$

$$J_3 = S_{11}S_{22}S_{33} = \frac{130}{3} \cdot \frac{40}{3} \cdot \left(-\frac{170}{3}\right)$$