Teoretická a aplikovaná mechanika (TAM)
Přednáška 01

Ondřej Jiroušek

Ústav mechaniky a materiálů
Fakulta dopravní
ČVUT v Praze

Informace o kurzu
Motivace
Základní rovnice matematické teorie pružnosti (opakování)
Invarianty tenzoru napětí

Úvodní informace, podmínky absolvování kurzu

Přednášející, konzultace

- Ondřej Jiroušek (F206)
- email: jirousek@fd.cvut.cz
- konzultační hodiny: středa 16:30 - 17:30 F206
- prosím objednat přes: `http://konzultace.fd.cvut.cz` Link

Webové stránky předmětu, materiál ke kurzu

- `http://mech.fd.cvut.cz/education/master/k618tam/index_html` Link
- `http://mech.fd.cvut.cz/members/jirousek/download/k618tam` Link
- ~~dobrovolné domácí úkoly (zadání na konci každé přednášky, body navíc)~~
- ~~NEBO domácí úkoly (zadání po každé přednášce na webu, body navíc)~~
- body z přednášek (cca 5x1 bod na 1 přednášku) - připočítávají se u zkoušky

Zkouška

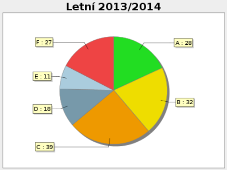
- písemná část (teoretická část, výpočetní část)
- ústní část (znalosti)
- pevné bodové hodnocení písemky, ústní část vždy

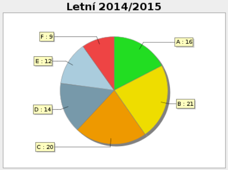
Předpoklady

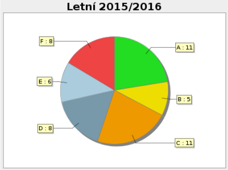
- matematika (diferenciální a integrální počet, maticová algebra)
- statika (průběhy M–N–T, momenty setrvačnosti)
- pružnost a pevnost (napětí, tah-tlak, ohyb, DROČ, $\sigma_y = \frac{M_y}{EI_y} z$)
- materiál (pracovní diagram, mechanické zkoušky)
- teorie konstrukcí (RN, RD, stěny, desky, základové konstrukce)

Historie klasifikace

- 18TAM : leto 2014/2015 :: A:16 B:21 C:20 D:14 E:12 **F:9** (celkem 92)
- 18TAM : leto 2015/2016 :: A:11 B:5 C:11 D:8 E:6 **F:8** (celkem 56)
- 18TAM : leto 2017/2018 :: A:1 B:11 C:7 D:7 E:6 **F:0** (celkem 32)
- 18TAM : leto 2018/2019 :: A:4 B:3 C:6 D:3 E:1 **F:5** (celkem 22)







Skripta, učebnice, materiál ke studiu

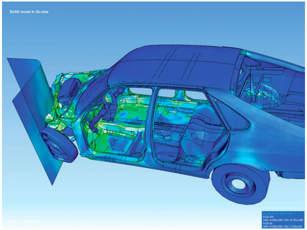
- Pružnost, pevnost, plasticita: pro stud. fak. stavební. Jiří Šejnoha, Václav Kufner ČVUT, 1990 ISBN 8001003655, 9788001003657
- Pružnost, pevnost, plasticita: určeno pro stud. fak. stavební. Jiří Šejnoha, Jitka Bittnarová. Edition 2. Publisher České vysoké učení technické, 1989. ISBN 8001001393, 9788001001394
- Plasticity theory. Jacob Lubliner. Publisher Macmillan, 1990. Original from the University of California. ISBN 0023721618, 9780023721618. Length 495 pages
- Základy lomové mechaniky Jiri Kunz. Ceske vysoke uceni technicke v Praze. Jaderna a fyzikalne inzenyrska fakulta. ISBN: 800102248X 9788001022481 260 s.
- Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications Ted L. Anderson Third Edition Hardcover, 2004 ISBN-13: 978-0849316562 ISBN-10: 0849316561 Edition: 3rd

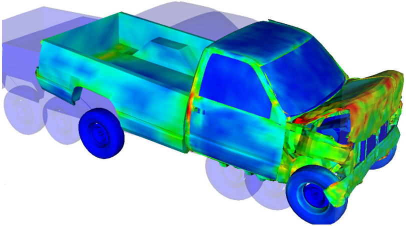
Další volně dostupný online materiál:

- http://fast10.vsb.cz/lausova/pruznost.pdf Link
- http://fast10.vsb.cz/krejsa/pruznost.htm Link
- http://ksm.fsv.cvut.cz/~sejnom/download/pm10_tisk.pdf Link
- http://people.fsv.cvut.cz/~pkabele/YNAK/ Link
- http://student.chytrak.cz/unava/09%20K-koncepce.pdf Link
- http://hutar.wz.cz/lomovka/08.pdf Link
- https://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=41136 Link
- http://fast10.vsb.cz/lausova/ Link
- http://ocw.mit.edu/courses/materials-science-and-engineering/3-11-mechanics-of-materials-fall-1999/modules/frac.pdf Link
- http://www.mate.tue.nl/~piet/edu/frm/pdf/frmsyl1213.pdf Link
- http://civil.colorado.edu/~saouma/Lecture-Notes/lecfrac.pdf Link

Analýza konstrukcí

- Numerické simulace - dnešní analýza inženýrských staveb a konstrukcí
- CAD/CAM model
- diskretizace - síť konečných prvků
- okrajové podmínky, zatížení
- fyzikální problém (diferenciální rovnice) – co lze zanedbat?
- materiálový model (lineární elastický materiál, elasto-plastický model s poškozením, kvazikřehký materiál)
- analýza výsledků, kontrola, jednoduchý model, elementární výpočet





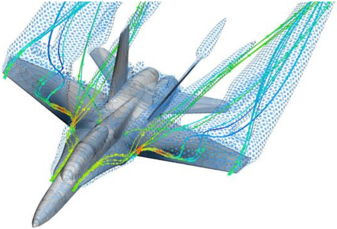
Další příklady numerických analýz konstrukcí (FEM, FVM, BEM)

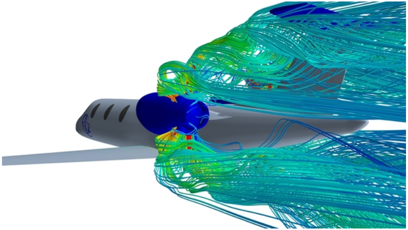
Navier-Stokesovy rovnice:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_j\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_i u_j + p\delta_{ij} - \tau_{ji}\right] = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e_0\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_j e_0 + u_j p + q_j - u_i \tau_{ij}\right] = 0$$





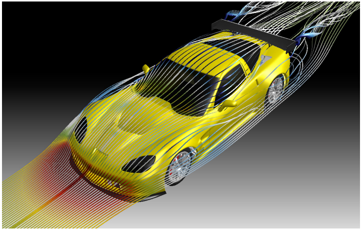
Další příklady numerických analýz konstrukcí (FEM, FVM, BEM)

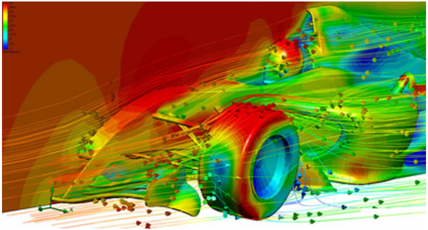
Navier-Stokesovy rovnice:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_j\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho u_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_i u_j + p\delta_{ij} - \tau_{ji}\right] = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho e_0\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\rho u_j e_0 + u_j p + q_j - u_i \tau_{ij}\right] = 0$$





Další příklady numerických analýz konstrukcí (FEM)

Základní rovnice pro řešení elasticity:

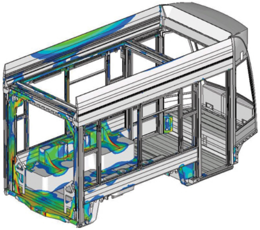
$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad \text{(tenzorový zápis)}$$

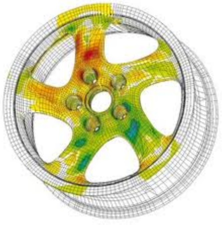
$$-\nabla\lambda(\nabla\cdot\mathbf{u}) - (\nabla\cdot\mu\nabla)\mathbf{u} - \nabla\cdot\mu(\nabla\mathbf{u})^T = \mathbf{f}$$

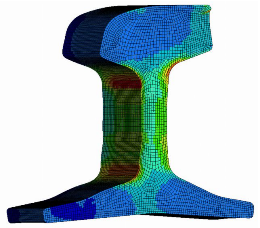
$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}[\mathbf{C} - \mathbf{I}] = \underbrace{\frac{1}{2}[\mathrm{Grad}^T\mathbf{U} + \mathrm{Grad}\mathbf{U}]}_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2}[\mathrm{Grad}^T\,\mathbf{U}][\mathrm{Grad}\,\mathbf{U}]$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad \mathrm{div}\,\mathbf{u} = \nabla\cdot\mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$







Co k tomu výpočtář (konstruktér) potřebuje?

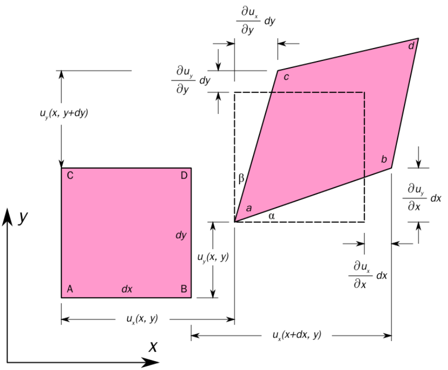
- Základy dané numerické metody (FEM, FVM, BEM)
- Základní znalosti o dané řešené diferenciální rovnici
- Znalosti o použitých konstitutivních vztazích
- t.j. použitý materiálový model (elastický, elasto-plastický, zákon zpevnění...)
- Omezení daných fyzikálních vztahů

A jak to souvisí s tím, co mě učí na K618?

- Statika - působení sil, okrajové podmínky (vazby), výpočet reakcí, M-N-T.
- Kinematika, dynamika - pohybové rovnice (diferenciání), řešení v čase.
- Pružnost a pevnost - řešení v elastické oblasti, prut je základ.
- Materiály - základy zjišťování mechanických vlastností, vliv struktury na mech. vl.
- TIK - teorie konstrukcí, tedy RN, RD, stěny, desky, základové konstrukce...
- TAM - rozšíření 3D pružnosti mimo elastickou oblast. Plasticita, lomová mechanika.
- další předměty (MKP) - numerické metody mechaniky, software (open-source, Ansys).

Základní rovnice 3D elasticity
(15 rovnic pro 15 neznámých)

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \qquad \underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \qquad \underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

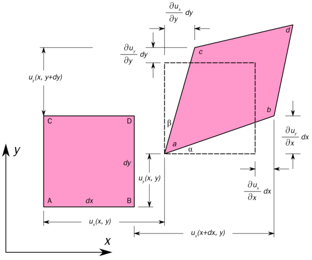


$$\varepsilon_x = \frac{\text{a'b'} - \text{AB}}{\text{AB}} = \frac{\left(\text{dx} + \left(u + \frac{\partial u}{\partial x}\text{dx}\right) - u\right) - \text{dx}}{\text{dx}} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\text{a'c'} - \text{AC}}{\text{AC}} = \frac{\left(\text{dy} + \left(v + \frac{\partial v}{\partial y}\text{dy}\right) - v\right) - \text{dy}}{\text{dy}} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}} \qquad (1)$$

Geometrické rovnice (smyková deformace)



Smyková deformace γ_{xy} je součet úhlů mezi úsečkami $\overline{AC}$ a $\overline{AB}$: $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$:

$$\tan\alpha = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}dx}{dx + \frac{\partial u_x}{\partial x}dx} = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}}{1 + \frac{\partial u_x}{\partial x}}$$

$$\tan\beta = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}dy}{dy + \frac{\partial u_y}{\partial y}dy} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}}{1 + \frac{\partial u_y}{\partial y}}$$

Pro malou hodnotu gradientu posunutí:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} \ll 1\ ;\quad \frac{\partial u_y}{\partial y} \ll 1$$

Pro malé rotace, t.j. α a $\beta \ll 1$ dostáváme: $\tan\alpha \approx \alpha,\ \tan\beta \approx \beta$
Tudíž:

$$\alpha \approx \frac{\partial u_y}{\partial x}\ ;\quad \beta \approx \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} && (2)\\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} && (3)\\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} && (4) \end{aligned}}$$

Výsledné rovnice

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$
$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Potom můžeme geometrické rovnice zapsat v maticovém tvaru:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\partial}\, \underline{u}$$

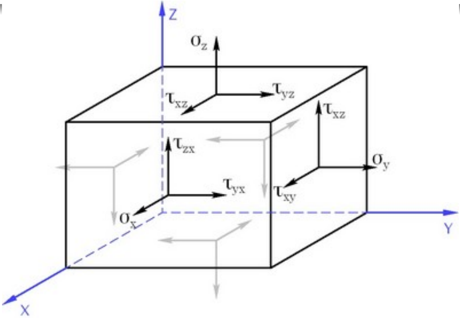
Statické podmínky rovnováhy (Cauchyho rovnice) v maticovém zápise:

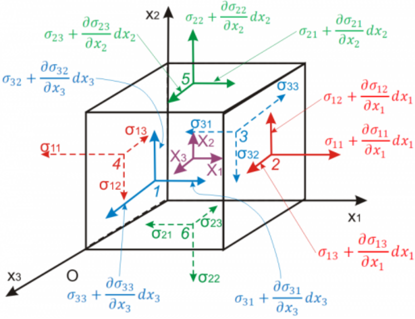
Podmínky rovnováhy na infinitesimálním objemu dV, náznakem:

$$\sum F_{ix} = \sum \sigma_x dydz + \sum \tau_{xy} dydz + \sum \tau_{xz} dxdz$$

$$\sum F_{iy} = \sum \sigma_y dxdz + \sum \tau_{yx} dxdz + \sum \tau_{yz} dxdy$$

$$\sum F_{iz} = \sum \sigma_z dxdy + \sum \tau_{zx} dxdz + \sum \tau_{xz} dxdz$$





Podmínky rovnováhy na elementu:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \tag{7}$$

zkráceně:

$$[\partial]\{\sigma\} + \{X\} = \{0\} \tag{8}$$

kde $\{X\}$ je vektor objemových sil (jednotky $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$)) a $[\partial]$ je tzv. operátorová matice:

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Tenzor napětí σ:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix}$$

Zákon o sdružených smykových napětí

Z momentových podmínek rovnováhy kolem těžišťových os plyne:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Obecně lze zapsat:

$$\boxed{\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \forall i, j} \tag{10}$$

Tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$ pak můžeme zapsat jako sloupcový vektor σ:

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{cccccc} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{yz} & \tau_{xz} & \tau_{xy} \end{array} \right\}^T$$

Rozšířený Hookův zákon:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x^1 &= \frac{1}{E}\sigma_x \\
\varepsilon_y^1 &= -\mu\varepsilon_x = -\frac{\mu}{E}\sigma_x \\
\varepsilon_z^1 &= -\mu\varepsilon_x = -\frac{\mu}{E}\sigma_x \\
\varepsilon_x^2 &= -\mu\varepsilon_y = -\frac{\mu}{E}\sigma_y \\
\varepsilon_y^2 &= \frac{1}{E}\sigma_y \\
\varepsilon_z^2 &= -\mu\varepsilon_y = -\frac{\mu}{E}\sigma_y \\
\varepsilon_x^3 &= -\mu\varepsilon_x = -\frac{\mu}{E}\sigma_z \\
\varepsilon_y^3 &= -\mu\varepsilon_x = -\frac{\mu}{E}\sigma_z \\
\varepsilon_z^3 &= \frac{1}{E}\sigma_z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_x^1 + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_x^3 \\
\varepsilon_y &= \varepsilon_y^1 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_y^3 \\
\varepsilon_z &= \varepsilon_z^1 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_z^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}\sigma_y - \frac{\mu}{E}\sigma_z \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\mu}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}\sigma_z \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\mu}{E}\sigma_x - \frac{\mu}{E}\sigma_y
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] && (11) \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right] && (12) \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right] && (13)
\end{aligned}
}
$$

Rozšířený Hookův zákon (fyzikální rovnice) zapsat maticově takto:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Matice materiálové poddajnosti $[C]$ pro **izotropní** materiál:

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}$$

Fyzikální rovnice v maticovém tvaru:

$$\{\epsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad \Longrightarrow \quad \{\sigma\} = [C]^{-1}\{\varepsilon\} = [D]\{\varepsilon\}$$

Ortotropní materiál - rozšířený Hookův zákon:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\mu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{E} & -\frac{\mu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Matice materiálové poddajnosti $[C]$ pro **ortotropní** materiál:

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\mu_{yx}}{E_y} & -\frac{\mu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\mu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{xz}}{E_x} & -\frac{\mu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix}$$

Musí platit symetrie (celkově 9 neznámých materiálových konstant):

$$\frac{\mu_{yx}}{E_y} = \quad \Longrightarrow \quad \{\sigma\} = [C]^{-1}\{\varepsilon\} = [D]\{\varepsilon\}$$

V prostoru hlavních napětí (Haigh-Westergardův prostor) bude vektor napětí mít tvar:

$$\{\sigma\}^T = \left\{ \begin{array}{cccccc} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \tag{14}$$

Doplňme ještě pro úplnost výrazy pro invarianty napětí (budeme potřebovat při teoriích porušení):

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2 = \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yz}\tau_{xz}\tau_{xy} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \tag{15}$$

a invarianty deformace:

$$\begin{aligned} i_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ i_2 &= \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y - \frac{1}{4}(\gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{xy}^2) = \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ i_3 &= \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + \frac{1}{4}(\gamma_{yz}\gamma_{xz}\gamma_{xy} - \varepsilon_x\gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y\gamma_{xz}^2 - \varepsilon_z\gamma_{xy}^2) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \end{aligned} \tag{16}$$

Pomocí invariantů napětí/deformace lze jednoduše rozložit napjatost v bodě na napjatost objemovou (volumetrickou) a deviatorickou. Také jsou tyto napjatosti nazývány napjatost změny objemu a napjatost změny tvaru. Symbolicky zapíšeme pro vektor napětí:

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^T &= \{\sigma_v\}^T + \{\sigma_D\}^T \\ \{\sigma_v\}^T &= \left\{ \begin{array}{cccccc} I_1/3 & I_1/3 & I_1/3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \\ \{\sigma_D\}^T &= \left\{ \begin{array}{cccccc} \sigma_x - I_1/3 & \sigma_y - I_1/3 & \sigma_z - I_1/3 & \tau_{yz} & \tau_{xz} & \tau_{xy} \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{17}$$

a vektor deformace:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}^T &= \{\varepsilon_v\}^T + \{\sigma_D\}^T \\ \{\varepsilon_v\}^T &= \left\{ \begin{array}{cccccc} i_1/3 & i_1/3 & i_1/3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \\ \{\varepsilon_D\}^T &= \left\{ \begin{array}{cccccc} \varepsilon_x - i_1/3 & \varepsilon_y - i_1/3 & \varepsilon_z - i_1/3 & \tau_{yz} & \tau_{xz} & \tau_{xy} \end{array} \right\} \end{aligned} \tag{18}$$

Deviátor tenzoru napětí

$$
\begin{aligned}
\{\sigma\}^T &= \{\sigma_v\}^T + \{\sigma_D\}^T \\
\{\sigma_v\}^T &= \left\{\begin{array}{cccccc} I_1/3 & I_1/3 & I_1/3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} \\
\{\sigma_D\}^T &= \left\{\begin{array}{cccccc} \sigma_x - I_1/3 & \sigma_y - I_1/3 & \sigma_z - I_1/3 & \tau_{yz} & \tau_{xz} & \tau_{xy} \end{array}\right\}
\end{aligned} \tag{19}
$$

a vektor deformace:

$$
\begin{aligned}
\{\varepsilon\}^T &= \{\varepsilon_v\}^T + \{\sigma_D\}^T \\
\{\varepsilon_v\}^T &= \left\{\begin{array}{cccccc} i_1/3 & i_1/3 & i_1/3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} \\
\{\varepsilon_D\}^T &= \left\{\begin{array}{cccccc} \varepsilon_x - i_1/3 & \varepsilon_y - i_1/3 & \varepsilon_z - i_1/3 & \tau_{yz} & \tau_{xz} & \tau_{xy} \end{array}\right\}
\end{aligned} \tag{20}
$$